ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. П. Аксенов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 1

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

УМО ВО рекомендует
МО рекомендует

ЮРАЙТ
biblio-online.ru

А. П. Аксенов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 1

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям

Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73
А42

Автор:

Аксенов Анатолий Петрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Рецензенты:

Кудрявцев Л. Д., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова;

Розанова С. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики; ;

Будак А. Б., кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Аксенов, А. П.

А42 Дифференциальные уравнения. В 2 частях. Ч. 1 : учебник для вузов / А. П. Аксенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 241 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-9916-7420-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-9916-7421-8

Предлагаемый методический комплекс состоит из четырех комплектов. Первые два содержат изложение курса математического анализа, в третьем излагается теория обыкновенных дифференциальных уравнений, в четвертом — теория функций комплексной переменной.

Учебник рассчитан на студентов высших технических учебных заведений. Он составлен на основе курса лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Основанием для написания учебника послужило желание дать не слишком объемное, но достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ упомянутых выше разделов курса высшей математики.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-9916-7420-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-9916-7421-8

Оглавление

Предисловие к циклу учебников по высшей математике

Вашему вниманию предлагается цикл книг по разделам высшей математики (математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной), составленных на основе курсов лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Основанием для написания цикла послужило желание дать достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ высшей математики.

Возникшая еще в древности из практических потребностей математика выросла к настоящему времени в громадную систему разветвленных дисциплин. Как и другие науки, она отражает законы материальной действительности и служит важным инструментом познания природы. Одной из характерных особенностей математики является исключительная широта ее применения.

Во-первых, мы постоянно — на производстве, в быту, в общественной жизни — пользуемся наиболее распространенными понятиями и выводами математики, вовсе не задумываясь об этом. Так, мы применяем арифметику, считая дни или расходы, а подсчитывая площадь квартиры, используем формулы геометрии. Формулы эти, конечно, очень простые, но следует знать, что когда-то в древности они были одним из высших достижений зарождавшейся тогда математики.

Во-вторых, вся современная техника была бы невозможна без математики, так как без расчетов не обходится ни одно техническое усовершенствование. Наконец, почти все науки в той или иной степени пользуются математикой. Точные науки — механика, астрономия, физика, а также в большой мере и химия — обычно выражают свои законы формулами и развивают свои теории, широко используя математический аппарат. Без математики прогресс этих наук был бы просто невозможен.

Приведем несколько примеров особенно блестящих применений математики в точных науках и технике. Одна из самых далеких планет солнечной системы — Нептун была открыта в 1846 г. на основании математических расчетов. Анализируя «неправильности» в движении планеты Уран, астрономы Д. Адамс и У. Леверье пришли к выводу, что они вызваны притяжением другой планеты. Леверье на основании законов механики и закона тяготения вычислил, где эта планета должна находиться, и наблюдатель, которому он об этом сообщил, увидел ее в телескоп там, где указал Леверье. Это открытие было триумфом не только механики и астрономии, но также и математического расчета.

Другой, не менее убедительный пример — открытие электромагнитных волн. Английский физик Дж. Максвелл, обобщая установленные опытами законы электромагнитных явлений, выразил эти законы в виде уравнений. Из уравнений он чисто математически вывел, что могут существовать электромагнитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Опираясь на это, он предложил электромагнитную теорию света, которая затем была всесторонне развита и обоснована.

Но кроме того, вывод Максвелла подтолкнул ученых на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения, например испускаемых при колебательном разряде. Такие волны, действительно, были открыты Г. Р. Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний, вывел их в область широких применений и положил тем самым начало всей радиотехнике. Таким образом, в открытии радио, ставшего общим достоянием, большую роль сыграли также результаты чисто математического вывода.

Так от наблюдений наука идет к обобщению, к теории явлений, к формулировке законов и их математическому выражению. Из этих законов рождаются новые выводы, и, наконец, теория воплощается в практике, которая в свою очередь дает теории новые мощные импульсы к развитию.

Замечательно еще и то, что часто даже самые абстрактные построения математики, возникшие внутри нее самой, уже без непосредственного влияния со стороны естествознания или техники находят тем не менее плодотворные применения. Например, понятие о мнимых числах появилось в алгебре, и долго их реальный смысл оставался непонятным, на что указывает само их название. Однако после того, как им было дано геометрическое толкование, мнимые числа вполне укрепились в математике, и возникла обширная теория функций комплексной переменной. Эта теория, так сказать, «мнимых» функций от «мнимых» переменных оказалась вовсе не мнимым, а очень реальным средством решения вопросов техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории. Та же теория оказывается полезной при решении задач, например о просачивании воды под плотинами — задач, значение которых очевидно в период строительства крупных электростанций.

В настоящее время благодаря появлению быстродействующих вычислительных машин произошел большой качественный скачок в использовании математических методов, которые стали применяться не только в тех областях, где математика использовалась уже давно, но и в тех областях человеческих знаний, где либо математика еще совсем недавно применялась мало, либо ее применение даже не представлялось возможным (медицина, экономика, лингвистика, социология и т.п.).

Современный научный работник или инженер должен хорошо владеть математическими методами исследования, которые могут применяться в сфере его деятельности. Для того чтобы иметь возможность применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно прежде всего уметь правильно использовать математический аппарат, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели.

Свободное владение математическими методами накапливается и развивается в процессе систематических занятий, в результате длительной и настойчивой работы. Кто последовательно овладевает математическим аппаратом, приобретает твердое и точное знание математических фактов, тот легко и просто двигается дальше, приобретает уверенность в способности и умении справиться с встречающейся ему задачей, и математика делается послушным инструментом в его руках.

Большая польза от изучения математики состоит еще и в том, что оно (изучение) совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует человека, приучает логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации.

Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого процесса.

Овладеть в достаточной мере математическим методом, математической культурой мышления — далеко не простая задача. Но для того, кто сумеет этого достичь, труд не пропадет зря. Для него откроются новые перспективы человеческой деятельности, качественно новые возможности творчества и познания мира.

Помочь в этом и призван предлагаемый цикл учебников.

Автор посчитал полезным сделать изложение вопросов теории очень подробным и сопроводить его большим числом разобранных примеров и задач. Он исходил из убеждения, что такое построение курса поможет студентам быстрее овладеть практическими рецептами решения тех или иных задач, а также понять глубокие общие идеи, из которых эти рецепты возникают.

Помимо книг, указанных в списках литературы, указанных в учебниках, для их написания автором использованы материалы лекций, которые ему посчастливилось слушать в Ленинградском (ныне Санкт-Петербургском) государственном университете.

С искренней благодарностью автор вспоминает своих учителей — профессоров В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, А. Ф. Андреева, Г. М. Голузина, И. П. Натансона, Д. К. Фаддеева, блестящие лекции которых оставили у него неизгладимое впечатление.

Автор приносит глубокую благодарность доценту кафедры высшей математики СПбГПУ А. В. Ястребову за большую помощь в работе над циклом книг, а также за целый ряд полезных советов.

Автор выражает свою искреннюю признательность проректору СПбГПУ В. Н. Козлову за внимание, проявленное им к работе над учебниками.

Предисловие

Данный учебник является вторым в цикле учебников автора по разделам высшей математики и посвящен теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Книга разделена на два тома.

Учебник «Обыкновенные дифференциальные уравнения, теория и задачи» составлен на основе курса лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Теория дифференциальных уравнений — важнейшая ветвь математического анализа — имеет дело с такими уравнениями, где неизвестной является уже не величина, а функция, т.е. закон зависимости одной величины от другой или от нескольких других величин.

Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики, и особенно для ее приложений, объясняется главным образом тем, что к решению таких уравнений может быть приведено исследование многих физических проблем и технических задач. В механике, астрономии, физике, технике с помощью дифференциальных уравнений были достигнуты огромные успехи (например, И. Ньютон, исследуя дифференциальные уравнения движения тел, вывел законы движения планет, установленные И. Кеплером эмпирически; У. Леверье предсказал существование планеты Нептун и определил ее положение на небе на основе численного анализа тех же уравнений).

Настоящий учебник предназначен для студентов высших технических учебных заведений. Он может быть использован и для самостоятельной подготовки и повышения квалификации по дисциплинам «Математический анализ», «Высшая математика» и «Дифференциальные уравнения».

Цель книги — помочь студентам в формировании их математического мышления, выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания. Для достижения этой цели автор посчитал необходимым сделать изложение теории очень подробным и сопроводить его большим числом разобранных примеров и задач. Приведены подробные решения более 250 задач, разъясняющих основные идеи, теоретические факты и их практическое применение.

Содержание учебника полностью охватывает программу по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений для технических вузов с углубленным изучением математики. В первый том включены материалы по дифференциальным уравнениям первого порядка.

В учебнике все высказанные теоремы — и трудные, и простые — как правило, доказываются. Это является следствием убежденности автора в том, что распространенная тенденция устранять трудности в учебниках и изустных курсах за счет строгости и глубины, за счет подмены доказательств некоторыми их подобиями — вредная, поскольку фиктивные «доказательства» смазывают трудности и лишают обучение одной из важнейших его сторон — формирования у студентов одной из наиболее ценных компетенций — навыков к логически правильному мышлению.

Для успешного овладения материалом обучающиеся должны хорошо знать школьный курс математики и владеть навыками логического и алгоритмического мышления, а также математическими методами решения задач согласно требованиям стандартов среднего образования.

Согласно последним требованиям ФГОС ВО в результате изучения курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения» по данному учебнику обучающиеся должны:

знать

- основные понятия, теоретические основы, положения и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
- методы решения прикладных задач, базирующиеся на постановке задач и формулировке начальных и граничных условий для дифференциальных уравнений, интегрировании дифференциальных уравнений, исследовании свойств их решений и т.п.;
- современные представления о переводе задач моделирования реальных процессов и явлений на математический язык теории дифференциальных уравнений, выборе методов их решения, в том числе и численных, оценке полученных результатов;

уметь

- использовать полученные знания о математических понятиях, методах и моделях дифференциальных уравнений в практической деятельности и при изучении иных естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;
- применять теоретические знания к реальным ситуациям для математического исследования встречающихся в приложе-

ниях эволюционных процессов, а также анализа и интерпретации полученных результатов;

- выбирать необходимые методы теории дифференциальных уравнений для решения поставленных задач и реализации алгоритмов;
- самостоятельно расширять и углублять полученные математические знания, изучать новую математическую литературу, обобщать и систематизировать вновь поступающие сведения по теории дифференциальных уравнений;
- давать самостоятельные оценки эффективности употребляемых алгоритмов решения дифференциальных уравнений;
- самостоятельно формулировать, обосновывать и строго логически и математически доказывать утверждения теории дифференциальных уравнений;

владеть

- методами математического моделирования фундаментальных и прикладных проблем с помощью дифференциальных уравнений и выработки наиболее эффективных алгоритмов их решения;
- навыками решения дифференциальных уравнений, возникающих в ходе математического моделирования реальных процессов и явлений на практике;
- навыками работы с учебной и научной математической литературой для поиска необходимой для решения дифференциальных уравнений информации;
- современными технологиями анализа и информационной поддержки решения поставленных задач.

На основе полученных знаний у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

- способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- готовность использовать основные законы и методы теории дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности, в теоретических и экспериментальных исследованиях;
- способность представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов теории дифференциальных уравнений;
- умение выявить математическую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для решения дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании, соответствующий физико-математический аппарат;

- способность разрабатывать математические модели объектов профессиональной деятельности в форме дифференциальных уравнений, применять необходимые для построения моделей знания принципов действия и математического описания различных систем (информационных, механических, электронных и т.п.), а также определять характеристики объектов по разработанным моделям на базе решения дифференциальных уравнений;
- навыки владения основными приемами математической обработки и представления экспериментальных данных в виде дифференциальных уравнений и соответствующих начальных и граничных условий.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения, с которыми мы встречались до сих пор, служили преимущественно для отыскания численных значений тех или иных величин. Однако в приложениях математики часто возникают качественно новые задачи, в которых неизвестной является сама функция, сам закон зависимости одних переменных от других. Например, изучая процесс охлаждения тела, мы должны определить, как будет изменяться с течением времени его температура, при определении движения планеты нам необходимо определить зависимость ее координат от времени и т. д.

Наиболее важными из уравнений, служащих для разыскания функций, являются так называемые *дифференциальные уравнения.* Под этим названием понимают уравнения, в которые входит не только сама неизвестная функция, но и ее производные некоторых порядков.

Нижеследующие равенства могут служить примерами дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t);\ \frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\sin\omega t;$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (\tilde{1})$$

В первых двух из них неизвестная функция обозначена буквой x, а буквой t — независимая переменная; в последних же трех неизвестная функция обозначена буквой u, и она зависит от двух аргументов x и t или x и y.

Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняется главным образом тем, что к решению таких уравнений может быть приведено исследование многих физических проблем и технических задач. В механике, астрономии, физике, технике с помощью дифференциальных уравнений были достигнуты огромные успехи. Ньютон, исследуя дифференциальные уравнения движения тел, получил законы движения планет, установленные Кеплером эмпирически. Леверье в 1846 г. предсказал существование планеты Нептун и определил ее положение на небе на основе численного анализа тех же уравнений.

Ниже будет показано, что каждое дифференциальное уравнение определяет, вообще говоря, целый класс функций, ему удовлетворяющих. Теория дифференциальных уравнений должна дать возможность получить достаточно полное представление о свойствах всех этих функций. Кроме того, она должна обеспечить средства для нахождения численных значений функций, если это потребуется для расчетов.

Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. В том случае, когда неизвестная функция зависит от нескольких аргументов и в уравнение входят производные по нескольким аргументам, дифференциальное уравнение называется *уравнением с частными производными*. Первые два из уравнений (1) являются обыкновенными, а последние три — уравнениями с частными производными.

Теория уравнений с частными производными обладает многими своеобразными чертами, существенно отличающими ее от теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные идеи, связанные с такими уравнениями, излагаются в курсе математической физики; мы же в этом пособии будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Дадим теперь точные определения.

1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется любое соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции $y(x)$ до некоторого порядка включительно.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ — известная функция, заданная в некоторой области $(G) \subset \mathbf{R}^{n+2}$.

2. Число n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$), т. е. наивысший из порядков производных, входящих в (1), называется *порядком уравнения*.

Например, уравнение: $y' + xy - e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ является уравнением первого порядка, а уравнение: $y + y'' - x = 0$ — уравнением второго порядка.

3. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1) в промежутке $\langle a, b\rangle$ (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются), если подстановка функции $y = \varphi(x)$ в дифференциальное уравнение (1) превращает последнее в тождество по x на $\langle a, b\rangle$. При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ имеет в $\langle a, b\rangle$ непрерывные производные до порядка n включительно и что точка $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right)$ принадлежит области задания функции F при любом x из $\langle a, b\rangle$.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения (1) называется *интегрированием* этого уравнения.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ уравнения (1) на плоскости Oxy называется *интегральной кривой.*

Простейшим примером дифференциального уравнения является уравнение: $y' = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция, определенная и непрерывная на некотором интервале (a, b) оси Ox, а $y = y(x)$ — искомая функция независимой переменной x. Решениями этого уравнения являются первообразные функции для функции $f(x)$, а именно $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C$, где x_0 и $x \in (a, b)$, а C — произвольная постоянная.

Придавая постоянной C различные значения, мы получим бесконечное множество решений уравнения $y' = f(x)$. Отметим, что иметь бесконечное множество решений — характерное свойство дифференциальных уравнений. В этом смысле приведенный выше пример типичен. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию некоторого процесса, нельзя считать, что мы нашли зависимость между величинами, характеризующими данный процесс. Чтобы выделить из бесконечного множества зависимостей ту, которая описывает именно этот процесс, нужно иметь дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса. Без этого дополнительного условия задача недоопределена.

Рассмотрим несколько конкретных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. В резервуаре имеется *р кг* водного раствора соли, в котором содержится *q кг* соли. В определенный момент включается устройство, непрерывно подающее в резервуар r *кг* чистой воды в секунду и одновременно удаляющее из него r *кг* раствора. При этом в самом резервуаре жидкость непрерывно перемешивается.

Вопрос: как изменяется со временем количество соли в резервуаре?

▶ Момент начала процесса примем за начало отсчета времени t. Пусть $y(t)$ — искомая функция, выражающая в каждый момент t количество соли в резервуаре. В силу условия задачи и соглашения об отсчете времени, имеем: $y(0) = q$. Это пока единственное значение искомой функции, которое нам известно.

Поначалу кажется, что основная трудность задачи будет состоять в том, что концентрация раствора непрерывно меняется. Однако, применив надлежащую методику решения, можно извлечь пользу из этого "непрерывного" изменения, обратив эту кажущуюся главную трудность в решающее средство для достижения цели.

Зафиксируем некоторый момент времени t и посмотрим, что произойдет в резервуаре за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

В начале этого промежутка в резервуаре имеется $y(t)$ *кг* соли, а в конце — $y(t + \Delta t)$ *кг*. Разность $y(t) - y(t + \Delta t)$ — это количество соли, которое вытекло с раствором за время Δt. Так как концентрация раствора в течение промежутка времени от t до $t + \Delta t$ убывала от $\dfrac{y(t)}{p}$ до $\dfrac{y(t+\Delta t)}{p}$, то

$$\frac{y(t+\Delta t)}{p} \cdot r\Delta t < y(t) - y(t+\Delta t) < \frac{y(t)}{p} \cdot r\Delta t .$$

Разделив все члены этого двойного неравенства на Δt, получаем

$$\frac{y(t+\Delta t)}{p} \cdot r < -\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} < \frac{y(t)}{p} \cdot r .$$

Исходя из характера рассматриваемого процесса, можно сделать вывод, что искомая функция $y(t)$ непрерывна. Но тогда $y(t + \Delta t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} y(t)$. Переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\dfrac{y(t)}{p} \cdot r$. Последнее означает, что искомая функция $y(t)$ в каждой точке t имеет производную $y'(t)$, причем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{r}{p} \cdot y(t) . \qquad (2)$$

(2) — дифференциальное уравнение относительно функции $y(t)$. Таким образом, наша задача свелась к чисто математической задаче: найти решение $y = y(t)$ уравнения (2), для которого $y(0) = q$. Так как $y(t) > 0$, то, разделив обе части уравнения (2) на $y(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\ln y(t)) = -\frac{r}{p} \Rightarrow \ln y(t) = -\frac{r}{p}t + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная; обозначим ее так: $C_1 = \ln C$, $C > 0$. Тогда будем иметь

$$\ln y(t) = -\frac{r}{p}t + \ln C. \tag{3}$$

Из (3) находим:

$$y(t) = Ce^{-\frac{r}{p}t}. \tag{4}$$

Чтобы из множества функций (4) выделить ту, которая описывает процесс изменения количества соли в резервуаре, воспользуемся условием $y(0) = q$. Это условие дает, что $q = C$. Таким образом, окончательно получаем:

$$y(t) = qe^{-\frac{r}{p}t}. \blacktriangleleft \tag{5}$$

Задача 2. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Пусть известно, что в некоторый момент времени $t = t_0$ имелось R_0 граммов радия. Требуется определить количество радия в любой момент времени t.

▶ Пусть $R(t)$ — количество (в граммах) нераспавшегося радия в момент времени t. Перейдем от момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$. В момент $t + \Delta t$ количество нераспавшегося радия будет равно $R(t + \Delta t)$. Тогда разность $R(t) - R(t + \Delta t)$ — это количество радия, которое распалось за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Отношение $\dfrac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость распада радия за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, а предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = -\frac{dR(t)}{dt},$$

есть скорость распада радия в момент t.

Так как скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству, то получаем

$$-\frac{dR(t)}{dt} = kR(t), \tag{6}$$

где k — постоянная величина. (6) — дифференциальное уравнение относительно функции $R(t)$. Таким образом, наша задача свелась к чисто математической: требуется найти решение $R = R(t)$ уравнения (6), для которого $R(t_0) = R_0$.

Так как $R(t) > 0$, то, разделив обе части уравнения (6) на $R(t)$, получаем $\frac{d}{dt}(\ln R(t)) = -k \Rightarrow$

$$\ln R(t) = -kt + \ln C, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная ($C > 0$). Из (7) находим

$$R(t) = Ce^{-kt}. \tag{8}$$

Чтобы из множества функций (8) выделить ту, которая описывает процесс изменения количества радия, используем условие $R(t_0) = R_0$. Положив в (8) $t = t_0$, получаем $R_0 = Ce^{-kt_0} \Rightarrow$

$$C = R_0 e^{kt_0}. \tag{9}$$

Подставив теперь в (8) вместо C его значение из (9), будем иметь

$$R(t) = R_0 e^{-k(t-t_0)}. \blacktriangleleft \tag{10}$$

Задача 3. Тело, имеющее в начальный момент времени $t_0 = 0$ температуру T_0, поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равной T_1. Как будет изменяться с течением времени температура тела?

$\blacktriangleright$ Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t. Экспериментально установлено, что скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это означает, что

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma \cdot (T(t) - T_1), \tag{11}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Знак минус в правой части (11) соответствует экспериментальным данным: если $T(t) - T_1 > 0$, то температура тела убывает и поэтому скорость изменения температуры $\frac{dT(t)}{dt} < 0$, если же

$T(t)-T_1<0$, то температура тела возрастает, а следовательно, скорость ее изменения положительна.

Итак, процесс охлаждения (или нагревания) тела в среде с неизменной температурой моделируется уравнением (11). Так как $T_1=\text{const}$, то $\dfrac{dT(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}(T(t)-T_1)$. Поэтому уравнение (11) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}(T(t)-T_1)=-\gamma\cdot(T(t)-T_1)\ \Leftrightarrow\ \frac{\frac{d}{dt}(T(t)-T_1)}{T(t)-T_1}=-\gamma$$

(ибо $T(t)-T_1\neq 0$) или в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\ln|T(t)-T_1|\right]=-\gamma\quad\Rightarrow\quad \ln|T(t)-T_1|=-\gamma t+\ln C,$$

где $C>0$. Из последнего соотношения находим, что

$$|T(t)-T_1|=Ce^{-\gamma t}. \tag{12}$$

1) Пусть $T_0>T_1$ (тело охлаждается). Тогда $T(t)>T_1$ и, следовательно, имеем из (12): $T(t)-T_1=Ce^{-\gamma t}\Rightarrow$

$$T(t)=T_1+Ce^{-\gamma t}. \tag{13}$$

Чтобы из множества функций (13) выделить ту, которая описывает процесс изменения температуры тела с течением времени, воспользуемся условием $T(0)=T_0$. Это условие дает $T_0=T_1+C\Rightarrow$ $C=T_0-T_1$. Таким образом, получаем в этом случае (когда $T_0>T_1$)

$$T(t)=T_1+(T_0-T_1)e^{-\gamma t}. \tag{14}$$

Из (14) $\Rightarrow$ $T(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}T_1$, монотонно убывая.

2) Пусть $T_0<T_1$ (тело нагревается). Тогда $T(t)<T_1$ и, следовательно, имеем из (12): $T(t)-T_1=-Ce^{-\gamma t}\Rightarrow$

$$T(t)=T_1-Ce^{-\gamma t}. \tag{15}$$

Чтобы из множества функций (15) выделить ту, которая описывает процесс изменения температуры тела с течением времени, используем условие $T(0)=T_0$. Это условие дает $T_0=T_1-C\Rightarrow$ $C=T_1-T_0$. Таким образом, получаем в этом случае (когда $T_1>T_0$)

$$T(t)=T_1-(T_1-T_0)e^{-\gamma t}. \tag{16}$$

Из (16) $\Rightarrow$ $T(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}T_1$, монотонно возрастая. ◀

Задача 4. Тело массой m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила вязкого трения, действующая на тело, пропорциональна скорости падения тела, т. е. $F_{тр} = -\alpha v$, где $\alpha > 0$ — коэффициент трения.

Вопрос: как изменяется со временем скорость падения тела?

▶ Пусть $v(t)$ — скорость падения тела в момент времени t. На тело действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести $F_т = mg$ и сила вязкого трения $F_{тр} = -\alpha v$. В данном случае дифференциальное уравнение можно составить, используя второй закон Ньютона: $ma = F = F_т + F_{тр}$, т. е.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v, \tag{17}$$

так как ускорение $a = \dfrac{dv}{dt}$. Разделив обе части уравнения (17) на m, получаем

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v + g. \tag{18}$$

Приняв во внимание, что $g = \text{const}$, можем написать

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{\alpha}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\alpha}{m}v + g\right).$$

А тогда уравнение (18) принимает вид

$$-\frac{m}{\alpha}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\alpha}{m}v + g\right) = -\frac{\alpha}{m}v + g \Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{\alpha}{m}v + g\right)}{-\frac{\alpha}{m}v + g} = -\frac{\alpha}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\ln\left|-\frac{\alpha}{m}v + g\right| = -\frac{\alpha}{m} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|-\frac{\alpha}{m}v + g\right| = -\frac{\alpha}{m}t + \ln C,$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная. А тогда $\left|-\dfrac{\alpha}{m}v + g\right| = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$.

Или, так как $g - \dfrac{\alpha}{m}v > 0$, то $-\dfrac{\alpha}{m}v + g = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t} \Rightarrow$

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} - \frac{m}{\alpha}Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}. \tag{19}$$

Если тело начинает движение с нулевой скоростью, т. е. $v(0) = 0$, то, положив в (19) $t = 0$, находим

$$0 = \frac{mg}{\alpha} - \frac{m}{\alpha}C \Rightarrow C = g.$$

Заменив в (19) C на g, мы выделим тем самым из множества решений дифференциального уравнения (17) то решение, которое описывает изменение скорости тела с течением времени при условии, что $v(0) = 0$. Таким образом, получаем

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right). \tag{20}$$

При свободном падении без трения: $\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow v(t) = gt$, т. е. скорость возрастает линейно (это нам известно). При наличии же вязкого трения скорость, возрастая, тем не менее стремится к постоянной величине: $v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{mg}{\alpha}$.

Замечание. Даже из приведенного выше небольшого числа простейших задач становится ясно, что решение каждой из них состоит из двух этапов. Первый этап решения задачи заканчивается составлением дифференциального уравнения для искомой функции. Второй этап представляет собой чисто математическую задачу, а именно: решить полученное дифференциальное уравнение, т. е. найти все его решения или только те, для которых выполняются определенные дополнительные условия. Следует отметить, что все многообразие природных процессов и явлений не сводится к дифференциальным уравнениям нескольких типов. Мир дифференциальных уравнений богат почти настолько, насколько разнообразен реальный мир.

В этом пособии мы рассмотрим многие типы дифференциальных уравнений и ознакомимся с методами их решения. Мы увидим, что дифференциальные уравнения, решаемые в элементарных функциях, немногочисленны. (Запас элементарных функций оказывается слишком бедным для того, чтобы дать описание многих физических процессов и явлений.) Поэтому весьма часто случается, что исследование того или иного дифференциального уравнения, встречающегося в физике или механике, побуждает вводить новые классы функций, подвергать их исследованию и расширять арсенал тех функций, которые применяются при решении прикладных задач.

В задачу теории дифференциальных уравнений входит также качественный анализ, т. е. выяснение основных свойств решений непосредственно по виду уравнения (не решая его).

Представим себе, что мы изменяем начальные значения для искомой функции и производных от нее (изменяем начальное состояние изучаемого процесса). Тогда будет изменяться и само решение (будет иначе протекать процесс). Теория должна обеспечить нам возможность судить о том, каким будет это изменение. В частности, будет ли при малых изменениях начальных данных мало изменяться и само решение и будет ли оно, следовательно, устойчивым в этом отношении, или же малые изменения начальных данных могут вызывать большие изменения в самом решении, и оно будет неустойчивым.

Мы должны также уметь составить качественную и, там, где можно, количественную картину поведения не только отдельных решений уравнения, но и всех его решений, взятых вместе.

Наконец, когда потребуется произвести расчет, нужно будет находить решение уравнения численно. Здесь теория обязана доставить в руки исследователя методы возможно более экономного и быстрого вычисления решений.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Основные понятия и определения

1°. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Здесь x — независимая переменная; $y = y(x)$ — неизвестная функция; $F(x, y, y')$ — известная функция, заданная в некоторой области $(G) \subset \mathbf{R}^3$. ((1) — дифференциальное уравнение первого порядка общего вида; оно не разрешено относительно производной.)

В этой главе будем рассматривать уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, а именно уравнения вида

$$y' = f(x, y) \left(\frac{dy}{dx} = f(x, y) \right), \tag{2}$$

где $f(x, y)$ — известная функция двух переменных, заданная в некоторой области $(D) \subset \mathbf{R}^2$.

Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{3}$$

Здесь $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — известные функции переменных x и y, заданные в некоторой области $(D) \subset \mathbf{R}^2$. (Уравнение (3) имеет симметричную форму; в нем переменные x и y — равноправные.)

2°. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, т. е. уравнение вида (2):

$$y' = f(x, y).$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области (D) плоскости Oxy ($f(x, y) \in C(D)$). Будем говорить в этом случае, что уравнение $y' = f(x, y)$ задано в области (D).

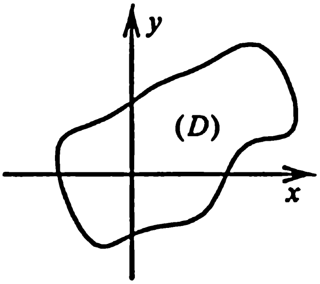

Рис. 1.1

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (2) в промежутке $\langle a, b\rangle$, если:

1) $\varphi(x)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$,

2) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$,

3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$.

Заметим, что функция $f(x, \varphi(x)) \in C(\langle a, b\rangle)$ как суперпозиция непрерывных функций. У нас $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, $x \in \langle a, b\rangle$. Следовательно, $\varphi'(x) \in C(\langle a, b\rangle)$.

Вывод: любое решение уравнения (2) непрерывно дифференцируемо на промежутке $\langle a, b\rangle$.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, дифференциального уравнения (2) называется интегральной кривой этого уравнения.

Проекция графика решения на ось ординат называется фазовой кривой (траекторией) дифференциального уравнения.

3°. Отметим, что решение уравнения (2) может быть получено иногда в неявной форме, т. е. в виде соотношения

$$\psi(x, y) = 0. \tag{3}$$

Но при этом предполагается, что соотношение (3) определяет y как функцию от x: $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, которая является решением уравнения (2) на промежутке $\langle a, b\rangle$.

Решение дифференциального уравнения (2) может быть получено также в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \langle \alpha, \beta\rangle. \tag{4}$$

И в этом случае предполагается, что соотношения (4) определяют y как функцию от x: $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, которая является решением уравнения (2) на промежутке $\langle a, b\rangle$.

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{1}{(x+y)^2}. \tag{5}$$

Убедиться, что функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением $y = \operatorname{arctg}(x+y) + C$, где C — произвольная постоянная, является решением уравнения (5).

▶ В этом примере $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ $\Rightarrow$ Уравнение (5) определено на всей плоскости Oxy, исключая точки прямой $y = -x$. У нас y, как функция от x задана неявно соотношением

$$\underbrace{\operatorname{arctg}(x+y) - y + C}_{=F\ (\text{обозначение})} = 0. \tag{6}$$

Видим, что сама функция F и ее частные производные $F'_x = \dfrac{1}{1+(x+y)^2}$, $F'_y = \dfrac{1}{1+(x+y)^2} - 1 = -\dfrac{(x+y)^2}{1+(x+y)^2}$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy. Видим, далее, что $F'_y \neq 0$ на всей плоскости Oxy, исключая точки прямой: $y = -x$.
А тогда из теории неявных функций следует, что в окрестности любой точки (x_0, y_0), такой, что $y_0 \neq -x_0$ и $\operatorname{arctg}(x_0 + y_0) - y_0 + C = 0$, соотношение (6) определяет единственную непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$ ($I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$), причем для любого $x \in I_\delta$:

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))} = \frac{\dfrac{1}{1+(x+\varphi(x))^2}}{\dfrac{(x+\varphi(x))^2}{1+(x+\varphi(x))^2}} = \frac{1}{(x+\varphi(x))^2}, x \in I_\delta.$$

Видим, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, определяемая соотношением (6), является решением уравнения (5). ◀

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y^2}{(1+xy)}. \tag{7}$$

Убедиться, что функция $y = \varphi(x)$, заданная параметрическими уравнениями

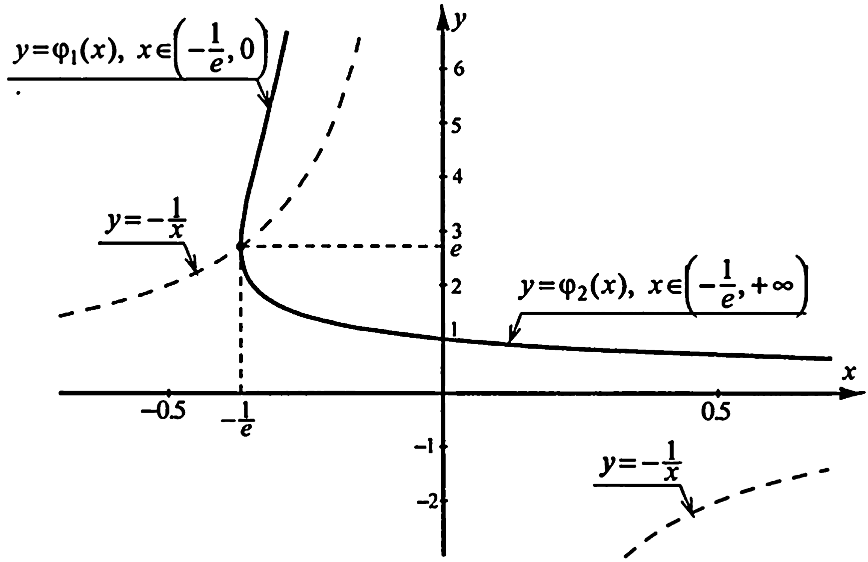

Рис. 1.2. К примеру 2 (для наглядности масштаб по оси Ox увеличен)

$$\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ +\infty). \tag{8}$$

является решением уравнения (7).

▶ В этом примере $f(x,y) = -\dfrac{y^2}{(1+xy)}$ $\Rightarrow$ Уравнение (7) определено на всей плоскости Oxy, исключая точки гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$.

Функции $x = te^t$, $y = e^{-t}$ определены и непрерывны для $t = (-\infty, +\infty)$. Имеем $x'_t = (t+1)e^t$; $y'_t = -e^{-t}$; $x'_t = 0$ при $t = -1$; $x'_t < 0$ для $t \in (-\infty, -1)$; $x'_t > 0$ для $t \in (-1, +\infty)$, $x_{\min} = x(t)\big|_{t=-1} = -\dfrac{1}{e}$; $y'_t < 0$ для $t \in (-\infty, +\infty)$ $\Rightarrow$ $y(t)$ — строго убывающая функция на промежутке $(-\infty; +\infty)$; $x(t)$ — строго убывающая функция на промежутке $(-\infty; -1)$ и строго возрастающая на промежутке $(-1, +\infty)$. Имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ для $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(У нас $x'_t \neq 0$, для $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.) Следовательно, $y'_x > 0$, когда $t \in (-\infty, -1)$, и $y'_x < 0$, когда $t \in (-1, +\infty)$. Имеем:

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} te^t = -0;\ \lim_{t\to-1-0} x(t) = -\frac{1}{e};$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} e^{-t} = +\infty;\ \lim_{t\to-1-0} y(t) = e;$$

$$\lim_{t\to-1+0} x(t) = -\frac{1}{e};\ \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} te^t = +\infty;$$

$$\lim_{t\to-1+0} y(t) = e;\ \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0.$$

Вывод: При изменении x от $-\frac{1}{e}$ до 0 функция $y(x)$ возрастает от e до $+\infty$. При изменении x от $-\frac{1}{e}$ до $+\infty$ функция $y(x)$ убывает от e до 0. Функция $y = \varphi(x)$, определяемая уравнениями (8), имеет две ветви: $y = \varphi_1(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, и $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Ветвь $y = \varphi_1(x)$ соответствует изменению параметра t от $-\infty$ до -1; ветвь $y = \varphi_2(x)$ соответствует изменению параметра t от -1 до $+\infty$.

Имеем $y''_{xx} = \dfrac{2t+3}{(t+1)e^{3t}} \Rightarrow y''_{xx} = 0$ при $t = -\frac{3}{2}$. Так как $y''_{xx} > 0$ для $t < -\frac{3}{2}$ и $y''_{xx} < 0$ для $-\frac{3}{2} < t < -1$, то $\left(-\frac{3}{2e\sqrt{e}}, e\sqrt{e}\right)$ — точка перегиба ветви $y = \varphi_1(x)$. Так как $y''_{xx} > 0$ для $t > -1$, то ветвь $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$, направлена выпуклостью вниз.

Итак, параметрические уравнения (8) определяют непрерывно дифференцируемые функции $y = \varphi_1(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, и $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Покажем, что обе эти функции являются решениями дифференциального уравнения (7).

Действительно, имеем как для $t \in (-\infty, -1)$, так и для $t \in (-1, +\infty)$:

$$y'_x+\frac{y^2}{(1+xy)}=-\frac{e^{-t}}{(t+1)e^t}+\frac{e^{-2t}}{1+t}=-\frac{1}{(t+1)e^{2t}}+\frac{1}{(t+1)e^{2t}}\equiv 0.$$

4°. Поле направлений. Говорят, что в некоторой области задано поле направлений, если каждой точке этой области поставлено в соответствие одно и только одно направление.

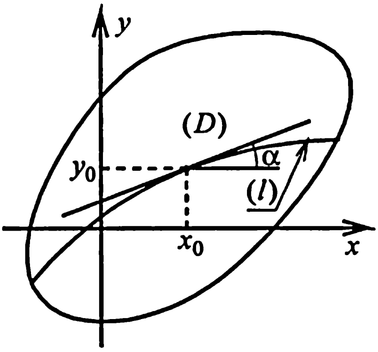

Рис. 1.3

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (2), т. е. уравнение $y'=f(x,y)$. Пусть (D) — область, в которой определена и непрерывна функция $f(x,y)$. Построим в области (D) поле направлений следующим образом: в каждой точке $(x_0,y_0)\in(D)$ проводим отрезок, например, единичной длины, исходящий из этой точки, так, чтобы он составил с положительным направлением оси Ox угол α, такой, что $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,y_0)$.

Пусть $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ — решение уравнения (2), график которого (l) проходит через точку (x_0,y_0). Так как $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — решение уравнения (2), то $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ для любого $x\in\langle a,b\rangle$, а значит, в частности, $\varphi'(x_0)=f(x_0,\varphi(x_0))=$ $=f(x_0,y_0)$. Но $\varphi'(x_0)$ — тангенс угла наклона касательной к графику (l) функции $y=\varphi(x)$ в точке (x_0,y_0) (см. рис. 1.3). Отсюда заключаем, что интегральная кривая уравнения (2) в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Верно и обратное: всякая кривая, расположенная в области (D) и касающаяся в каждой своей точке направления, имеющегося в этой точке, является интегральной кривой уравнения (2).

Замечание. Встречаются случаи, когда в точке (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ представляет неопределенность вида $0/0$. В такой точке нельзя указать никакого разумного направления поля. (Это — особая точка поля.)

При изучении поля направлений в области (D) представляют интерес так называемые изоклины.

Изоклиной называется кривая, во всех точках которой направление поля одинаково. Все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, в точках пересечения наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом.

$f(x,y)=k$ — уравнение семейства изоклин.

В некоторых случаях по виду правой части уравнения $y'=f(x,y)$ удается найти линию экстремумов и линию точек перегиба, т. е. линии, во всех точках которых интегральные кривые этого уравнения имеют соответственно экстремум или перегиб.

Выясним, например, как можно найти уравнение линии экстремумов для решений дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ и как отличить точки минимума от точек максимума.

▶ Пусть $y=\varphi(x)$ — любое решение уравнения $y'=f(x,y)$ на промежутке $\langle a,b\rangle$. Функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, и ее производная в точке экстремума равна нулю: $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=f\left(x,\varphi(x)\right)=0$. Следовательно, множество критических точек решений данного уравнения определяется соотношением $f(x,y)=0$. Пусть x_0 — экстремальная точка решения $y=\varphi(x)$. Если $\varphi''(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума, а если $\varphi''(x_0)<0$, то точка x_0 — точка максимума. Так как

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d}{dx}f\left(x,\varphi(x)\right)=\frac{\partial f\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial x}+\frac{\partial f\left(x,\varphi(x)\right)}{\partial y}\cdot\varphi'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi''(x_0)=\frac{\partial f\left(x_0,\varphi(x_0)\right)}{\partial x}+\frac{\partial f\left(x_0,\varphi(x_0)\right)}{\partial y}\cdot\underbrace{\varphi'(x_0)}_{=0}=\frac{\partial f\left(x_0,\varphi(x_0)\right)}{\partial x},$$

то множество точек минимума решений исходного уравнения $y'=f(x,y)$ определяется системой

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ f'_x(x,y)>0,\end{cases}$$

а множество точек максимума решений — системой

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ f'_x(x,y)<0.\end{cases}$$ ◀

Изоклины вместе с линиями экстремумов и точек перегиба дают возможность построить схематически графики интегральных кривых уравнения $y'=f(x,y)$.

Задача. С помощью изоклин построить приближенную схему интегральных кривых уравнения

$$y' = 2x(1-y). \tag{9}$$

▶ Семейство изоклин для данного уравнения определяется уравнением $2x(1-y)=k$, где k — действительный параметр. Это уравнение задает две прямые: $x=0$ и $y=1$ (при $k=0$) и семейство гипербол $y=1-\frac{k}{2x}$ (при $k \neq 0$). Заметим, что прямая $y=1$ является интегральной кривой, так как функция $y=1$ есть решение исходного дифференциального уравнения. Изоклину $x=0$ (т. е. ось ординат) интегральные кривые уравнения (9) пересекают под прямым углом.

(В точках, расположенных на прямой $x=0$, имеем $y'=0$. Значит, касательные к интегральным кривым в этих точках параллельны оси абсцисс и, следовательно, перпендикулярны к оси ординат.)

Так как $y'=0$ в точках прямой $x=0$, то точки прямой $x=0$ являются стационарными критическими точками для интегральных кривых уравнения (9). Для исследования на экстремум этих критических точек находим вторую производную функции $y=y(x)$. Имеем из (9):

$$y''(x) = 2(1-y) - 2xy'(x)$$

$\Rightarrow$ заменив в правой части y' его выражением из (9), находим

$$y''(x) = 2(1-y) - 2x \cdot 2x(1-y) =$$
$$= 2(1-y)(1-2x^2) \Rightarrow y''\big|_{x=0} = 2(1-y).$$

Видим, что $y''(0) < 0$ для $y > 1$ и $y''(0) > 0$ для $y < 1$. Следовательно, точки оси ординат, для которых $y > 1$, являются точками максимума интегральных кривых, а точки оси ординат, для которых $y < 1$ являются точками минимума интегральных кривых уравнения (9).

Из выражения для $y''(x)$ следует, что $y''(x)=0$ при $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как при переходе через точки $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ вторая производная изменяет знак, то точки прямых $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба интегральных кривых уравнения (9).

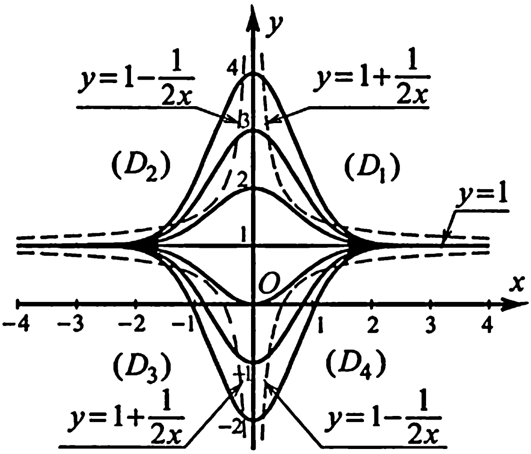

Рис. 1.4. К решению задачи о построении приближенной схемы расположения интегральных кривых

У нас правая часть уравнения (9): $f(x,y)=0$ на линиях $x=0$ и $y=1$. Эти линии делят всю плоскость на четыре части:

$$(D_1)=\begin{cases}x>0,\\ y>1;\end{cases}\quad (D_2)=\begin{cases}x<0,\\ y>1;\end{cases}\quad (D_3)=\begin{cases}x<0,\\ y<1;\end{cases}\quad (D_4)=\begin{cases}x>0,\\ y<1.\end{cases}$$

В каждой из этих четырех областей производная y' имеет определенный знак (в каждой области свой знак). Чтобы установить знак y' в области (D_i), $i=1,2,3,4$, достаточно определить знак функции $f(x,y)$ лишь в одной произвольной точке $(x_i,y_i)\in(D_i)$.

В нашем примере имеем:

1) $f(1,2)<0$. Значит, $y'<0$ в каждой точке области (D_1).

2) $f(-1,2)>0$. Значит, $y'>0$ в каждой точке области (D_2).

3) $f(-1,0)<0$. Значит, $y'<0$ в каждой точке области (D_3).

4) $f(1,0)>0$. Значит, $y'>0$ в каждой точке области (D_4).

Следовательно, пересекая прямую $x=0$, интегральные кривые переходят из области возрастания функции $y=y(x)$ в область убывания, если $y>1$ (т. е. при переходе из области (D_2) в область (D_1)), и из области убывания функции $y(x)$ в область возрастания, если $y<1$ (т. е. при переходе из области (D_3) в область (D_4)).

Рассмотрим еще две изоклины: при $k = 1$, $y = 1 - \frac{1}{2x}$, и при $k = -1$, $y = 1 + \frac{1}{2x}$. Касательные, проведенные к интегральным кривым в точках их пересечения с указанными изоклинами, образуют с осью абсцисс углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно.

Полученной информации достаточно для построения приближенной схемы интегральных кривых уравнения (9) (см. рис. 1.4).

Можно заметить еще, что уравнение (9) инвариантно относительно замены x на $-x$, откуда следует, что картина интегральных кривых симметрична относительно оси ординат.

5°. Задача Коши. Задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ состоит в следующем: среди всех решений этого уравнения найти решение вида $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которое удовлетворяет наперед заданному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$, где числа x_0 и y_0 такие, что точка $(x_0, y_0) \in (D)$; $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Геометрически задача Коши означает: среди всех интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ найти ту, которая проходит через заданную точку $(x_0, y_0) \in (D)$.

Условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ называется *начальным условием*, а числа x_0 и y_0 — *начальными данными*.

Отметим, что решение задачи Коши может оказаться и не единственным, так как иногда существует несколько решений уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющих заданным начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$. Это означает, что через точку (x_0, y_0) проходят несколько интегральных кривых несмотря на то, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в этой точке только одно направление поля. Поэтому вопрос о единственности решения задачи Коши представляет исключительный интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее многочисленных приложений.

Если установлено, что решение задачи Коши единственно, то, следовательно, других решений, удовлетворяющих тем же начальным условиям, нет. В вопросах естествознания это приводит к тому, что мы получаем вполне определенный закон явления, определяемый данным уравнением и заданными начальными условиями.

6°. Понятие единственности решения задачи Коши. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и дано начальное условие

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \cdot . \qquad (2_0)$$

Предполагается, что $f(x,y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^2$ и что точка $(x_0, y_0) \in (D)$. Пусть $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, — любые два решения задачи (2) — (2_0). Тогда: если существует интервал $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_\delta$, то говорят, что задача (2) — (2_0) имеет единственное решение. Точку $(x_0, y_0) \in (D)$ называют в этом случае *точкой единственности* уравнения (2).

(Подчеркнем еще раз, что соотношение $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_\delta$, должно выполняться для любой пары решений задачи (2) — (2_0).)

Пусть область $(D_1) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x,y) \in (D_1)$ является точкой единственности уравнения (2). Тогда (D_1) называют областью единственности уравнения (2).

Пример 1. Пусть имеется уравнение $y' = 3y^{2/3}$. Здесь $f(x,y) = 3y^{2/3}$ — определена и непрерывна на всей плоскости Oxy. Значит, $(D) = \mathbf{R}^2$. Легко проверить, что функция: $y = (x - C)^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, где C — произвольная постоянная, есть решение нашего уравнения. Легко видеть, что и функция $y \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — тоже решение нашего уравнения.

Возьмем любую точку (x_0, y_0) на плоскости Oxy, не лежащую на оси Ox ($y_0 \neq 0$; пусть сначала, для определенности, $y_0 > 0$). Через точку (x_0, y_0) проходят интегральные кривые ABC, $\tilde{A}\tilde{B}BC$, $A_1B_1\tilde{B}BC$ и т. д. Отметим, что любые две из этих интегральных кривых совпадают на промежутке $(x_B, +\infty)$. Значит, существует промежуток (в данном случае это промежуток $(x_B, +\infty)$), содержащий точку x_0, на котором совпадают любые два решения нашего уравнения, проходящие через точку (x_0, y_0).

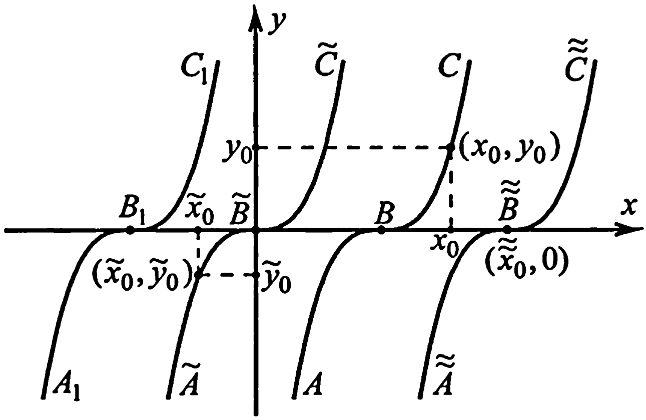

Рис. 1.6. К примеру 1

Возьмем теперь любую точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, для которой $\tilde{y}_0 < 0$. Через точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ проходят интегральные кривые $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, $\tilde{A}\tilde{B}BC$, $\tilde{A}\tilde{B}B\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{C}}$ и т. д. Любые две из этих интегральных кривых совпадают на промежутке $(-\infty, x_{\tilde{B}})$. Значит, существует промежуток (в данном случае это промежуток $(-\infty, x_{\tilde{B}})$), содержащий точку x_0, на котором совпадают любые два решения нашего уравнения, проходящие через точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$.

Вывод: любая точка (x, y) плоскости Oxy, не лежащая на оси Ox, является точкой единственности уравнения $y' = 3y^{2/3}$.

Возьмем любую точку, лежащую на оси Ox, а именно точку $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ ($\tilde{\tilde{x}}_0$ — любое число). Через точку $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ проходят, например, две интегральные кривые $y \equiv 0$ и $\tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{C}}$. Видим, что нельзя указать промежутка, содержащего точку $\tilde{\tilde{x}}_0$, на котором совпадали бы эти две интегральные кривые.

Вывод: точка $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ не является точкой единственности для уравнения $y' = 3y^{2/3}$. Так как $\tilde{\tilde{x}}_0$ — любое число, то любая точка линии $y = 0$ является точкой неединственности этого уравнения.

В примере 1 областями единственности уравнения являются открытая верхняя и открытая нижняя полуплоскости.

§2. Существование решения задачи Коши

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y), f(x,y) \in C(D), (D) \subset \mathrm{R}^2, \qquad (1)$$

и дано начальное условие

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in (D). \qquad (2)$$

Будем строить приближенное решение задачи (1) — (2). Пусть (D_x) есть проекция области (D) на ось Ox. Возьмем отрезок $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ — любой, но такой, чтобы было $I \subset D_x$. Обозначим $I^+ = [x_0, x_0 + h]$; $I^- = [x_0 - h, x_0]$. Разобьем отрезок I^+ на n частей ($n \ge 1$) точками $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_0 + h$, а отрезок I^- — на n частей ($n \ge 1$) точками

$$x_0 - h = x_{-n} < x_{-(n-1)} < \ldots < x_{-1} < x_0.$$

Пусть $\lambda = \max\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ i=0,-1,-2,\ldots,-(n-1)}} \{x_i - x_{i-1}\}$. λ — ранг дробления отрезка I.

Найдем значения функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0). Получим число $f(x_0, y_0)$.

Интегральная кривая уравнения (1), проходящая через точку (x_0, y_0), имеет касательную в точке (x_0, y_0) с угловым коэффици-

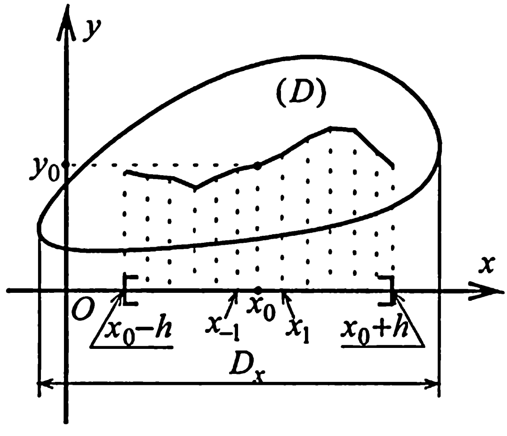

Рис. 1.7. К построению ломаных Эйлера

ентом $f(x_0,y_0)$. (Считаем, что такая интегральная кривая уравнения (1) существует.) Заменим интегральную кривую на отрезке $[x_{-1},x_1]$ касательной к ней в точке (x_0,y_0), т. е. прямолинейным отрезком, заданным уравнением:

$$\psi(x)=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0), \text{ где } x\in[x_{-1},x_1].$$

Имеем $\psi(x_0)=y_0$; $\psi'(x)=f(x_0,y_0)$, $x\in[x_{-1},x_1]$. Рассмотрим точку $(x_1,\psi(x_1))$, где

$$\psi(x_1)=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0).$$

Если эта точка принадлежит (D), то в ней определено направление поля, имеющее угловой коэффициент $f(x_1,\psi(x_1))$.

На отрезке $[x_1,x_2]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x)=\psi(x_1)+f(x_1,\psi(x_1))(x-x_1), x\in[x_1,x_2].$$

Затем рассматриваем точку $(x_2,\psi(x_2))$, где

$$\psi(x_2)=\psi(x_1)+f(x_1,\psi(x_1))(x_2-x_1).$$

Если точка $(x_2,\psi(x_2))\in(D)$, то в ней определено направление поля, имеющее угловой коэффициент $f(x_2,\psi(x_2))$. На отрезке $[x_2,x_3]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x)=\psi(x_2)+f(x_2,\psi(x_2))(x-x_2), x\in[x_2,x_3].$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим для $x\in[x_{n-1},x_n]$:

$$\psi(x)=\psi(x_{n-1})+f(x_{n-1},\psi(x_{n-1}))(x-x_{n-1})$$

(предполагаем, что на каждом таком шаге прямолинейный отрезок, заменяющий интегральную кривую, остается в области (D)).

Рассмотрим теперь точку $(x_{-1},\psi(x_{-1}))$, где

$$\psi(x_{-1})=y_0+f(x_0,y_0)(x_{-1}-x_0).$$

Если эта точка принадлежит (D), то на отрезке $[x_{-2},x_{-1}]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x)=\psi(x_{-1})+f(x_{-1},\psi(x_{-1}))(x-x_{-1}), x\in[x_{-2},x_{-1}].$$

Затем рассматриваем точку $(x_{-2},\psi(x_{-2}))$, где

$$\psi(x_{-2})=\psi(x_{-1})+f(x_{-1},\psi(x_{-1}))(x_{-2}-x_{-1}).$$

Если точка $(x_{-2}, \psi(x_{-2})) \in (D)$, то на отрезке $[x_{-3}, x_{-2}]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x) = \psi(x_{-2}) + f(x_{-2}, \psi(x_{-2}))(x - x_{-2}), x \in [x_{-3}, x_{-2}].$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим для $x \in [x_{-n}, x_{-(n-1)}]$

$$\psi(x) = \psi(x_{-(n-1)}) + f\left(x_{-(n-1)}, \psi(x_{-(n-1)})\right)(x - x_{-(n-1)}).$$

И здесь предполагается, что на каждом шаге прямолинейный отрезок, заменяющий интегральную кривую, остается в области (D). Таким образом, мы получаем ломаную, которая называется *ломаной Эйлера*. Ее можно рассматривать как приближенное изображение интегральной кривой уравнения (1), проходящей через точку (x_0, y_0).

Свойства ломаной Эйлера

Первое свойство. Функция $y = \psi(x)$, графиком которой является ломаная Эйлера, непрерывна на том промежутке, где определена. ($\psi(x)$ — кусочно-линейная функция на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.)

На каждом из промежутков $(x_{-i}, x_{-(i-1)})$, (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{1, n}$, функция $\psi(x)$ имеет конечную производную $\psi'(x)$, причем для любого $x \in (x_{-i}, x_{-(i-1)})$: $\psi'(x) = f\left(x_{-(i-1)}, \psi(x_{-(i-1)})\right)$, а для любого $x \in (x_{i-1}, x_i)$: $\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))$. В точках x_{-i} и x_i, $i = \overline{1, n-1}$, функция $\psi(x)$ имеет конечные односторонние производные; в точке x_{-n} — конечную правостороннюю, а в точке x_n — конечную левостороннюю производные:

$$\psi'_+(x_{-n}) = f\left(x_{-(n-1)}, \psi(x_{-(n-1)})\right);\ \psi'_-(x_n) = f(x_{n-1}, \psi(x_{n-1})).$$

$\psi'(x)$ — ступенчатая функция, определенная на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. (Считаем $\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))$ для $x \in [x_{i-1}, x_i)$ и $\psi'(x) = f\left(x_{-(i-1)}, \psi(x_{-(i-1)})\right)$ для $x \in (x_{-i}, x_{-(i-1)}]$, $i = \overline{1, n}$.)

Так как функция $\psi'(x)$ ограниченная на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и непрерывная там всюду, за исключением конечного числа точек, то она интегрируема на I. Мы знаем, что, если значения подынтегральной функции изменить в конечном числе точек, то от этого интегрируемость не нарушается и величина интеграла не изменяется. Приняв это во внимание, получаем, что для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ справедливо равенство

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi'(t)\,dt\,. \tag{3}$$

В самом деле, имеем, например, для $x \in [x_0, x_1]$:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x_0, y_0)\,dt = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)\,.$$

Для $x \in [x_1, x_2]$:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t)\,dt + \int_{x_1}^{x} \psi'(t)\,dt =$$

$$= \underbrace{y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)}_{=\psi(x_1)} + \int_{x_1}^{x} f(x_1, \psi(x_1))\,dt =$$

$$= \psi(x_1) + f(x_1, \psi(x_1))(x - x_1)$$

и т. д. Предположим, что для $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$\psi(x) = \psi(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))(x - x_{i-1})\,.$$

Тогда для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ будем иметь:

$$y = \psi(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t)\,dt}_{=\psi(x_1)} + \int_{x_1}^{x_2} \psi'(t)\,dt}_{=\psi(x_2)} + \ldots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi'(t)\,dt}_{=\psi(x_i)} + \int_{x_i}^{x} \psi'(t)\,dt =$$

$$= \psi(x_i) + f(x_i, \psi(x_i))(x - x_i)\,.$$

Переход от $i-1$ к i сделан. Следовательно, справедливость равенства (3) установлена.

Определение отрезка Пеано. Рассмотрим прямоугольник с центром в точке (x_0, y_0):

$$(\bar{P}) = \begin{cases} x_0 - a \le x \le x_0 + a, \\ y_0 - b \le y \le y_0 + b, \end{cases} \quad a > 0,\ b > 0.$$

$(\bar{P})$ — любой, но такой, что $(\bar{P}) \subset (D)$. Отметим, что $(\bar{P})$ — ограниченное замкнутое множество и что $f(x,y) \in C(\bar{P})$. Значит, существует число $M > 0$ такое, что $|f(x,y)| \leq M$, для любой точки $(x,y) \in (\bar{P})$. Введем в рассмотрение прямые: $y = y_0 \pm M(x - x_0)$. Обозначим абсциссы выхода этих прямых из $(\bar{P})$ через $x_0 - h$ и $x_0 + h$, а ординаты — через $y_0 - H$ и $y_0 + H$. Могут реализоваться случаи: *а*, *б* и *в*, изображенные на рис. 1.8.

Ясно, что $h \leq a$, $H \leq b$. Имеем $\frac{H}{h} = M \Rightarrow h = \frac{H}{M}$. Из рис. 1.8 видим: 1) либо $h < a$, тогда $h = \frac{H}{M} = \frac{b}{M}$ (см. случай а)); 2) либо $h = a$, тогда $h = \frac{H}{M} \leq \frac{b}{M}$ (см. случаи б) и в)). Следовательно, если брать $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, то отрезки прямых (L_+): $y = y_0 + M(x - x_0)$ и (L_-): $y = y_0 - M(x - x_0)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ будут лежать в прямоугольнике $(\bar{P})$.

Определение. Отрезок $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ называется *отрезком Пеано.*

Второе свойство. Если $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ — отрезок Пеано, то для любого n ($n \in \mathbb{N}$) и для любого разбиения отрезка I точками x_i, соответствующая ломаная Эйлера будет определена на всем отрезке I.

▶ Исходное звено ломаной имеет угловой коэффициент $f(x_0, y_0)$. Так как $|f(x,y)| \leq M$ всюду в $(\bar{P})$, то, в частности, $|f(x_0, y_0)| \leq M$ и, следовательно, это звено на всем отрезке $[x_0, x_1]$ будет оставаться в прямоугольнике $(\bar{P})$. Допустим, что все звенья ломаной до i-го включительно остаются в прямоугольнике $(\bar{P})$.

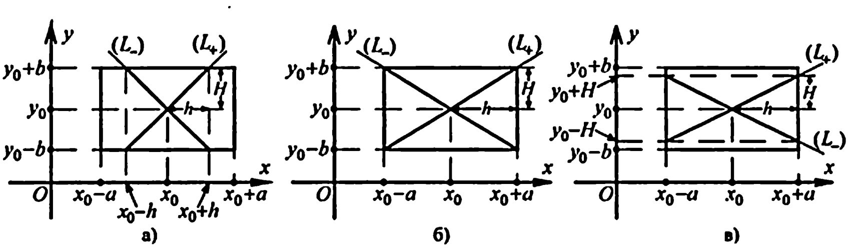

Рис. 1.8. К определению отрезка Пеано

Тогда для $(i+1)$-го звена ломаной будем иметь: угловой коэффициент $(i+1)$-го звена $f(x_i, \psi(x_i))$ удовлетворяет неравенству $|f(x_i, \psi(x_i)| \le M$; для любого $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi'(t)\,dt \Rightarrow |\psi(x) - y_0| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} \psi'(t)\,dt\right| \le M|x - x_0| \le M \cdot h \le b.$$

Значит, $(i+1)$-е звено ломаной остается в $(\bar{P})$. Переход от i к $i+1$ сделан. Следовательно, приходим к выводу, что ломаная Эйлера может быть построена на всем отрезке Пеано. ◀

Третье свойство. Любому, наперед заданному, $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$, $x \in I$, задачи (1) — (2) с рангом дробления $\lambda < \delta$, имеет место неравенство: $|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| < \varepsilon$, $x \in I$.

(В таком случае будем говорить, что функция $y = \psi(x)$, $x \in I$, является ε*-решением* задачи (1) — (2).)

▶ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию, функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $(\bar{P})$. Следовательно, по теореме Кантора она равномерно непрерывна в $(\bar{P})$. А тогда взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})$ из $(\bar{P})$, для которых $|\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| < \delta_1$, $|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{y}| < \delta_1$, будет

$$|f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon. \tag{4}$$

Возьмем число $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\delta_1}{M}\right\}$ и покажем, что это — δ искомое. В самом деле, построим на отрезке Пеано $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления $\lambda < \delta$. Пусть x — произвольное, принадлежащее I (пусть, для определенности, $x \in I^+$). Если окажется, что $x = x_i$, то $\psi'(x_i) - f(x_i, \psi(x_i)) = 0$. Если $x \in [x_{i-1}, x_i)$ $(i = \overline{1, n})$, то

$$\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1})). \tag{5}$$

Имеем, следовательно, $\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1})) - f(x, \psi(x))$. Так как $x \in [x_{i-1}, x_i)$, то $|x - x_{i-1}| \le \lambda < \delta \le \delta_1$. Имеем далее, $\psi(x) - \psi(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x} \psi'(t)\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ |\psi(x)-\psi(x_{i-1})| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x}\psi'(t)\,dt\right| \le M\cdot|x-x_{i-1}| \le M\lambda < M\delta \le \delta_1 .$$

Поэтому, принимая во внимание (4), получаем:

$$|\psi'(x)-f(x,\psi(x))| = |f(x_{i-1},\psi(x_{i-1}))-f(x,\psi(x))| < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x\in[a,b]$, называется *равномерно ограниченной* на промежутке $[a,b]$, если существует число $M>0$ такое, что для любого $n\in\mathrm{N}$ и для всех $x\in[a,b]$ оказывается: $|f_n(x)|\le M$.

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x\in[a,b]$, называется *равностепенно непрерывной* на промежутке $[a,b]$, если любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что для любых двух точек x' и x'' из $[a,b]$, для которых $|x''-x'|<\delta$, оказывается $|f_n(x'')-f_n(x')|<\varepsilon$ при любом $n=1,2,3,\ldots$.

Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x\in I=[x_0-h,x_0+h]$ — любая последовательность ломаных Эйлера, построенная на отрезке Пеано для задачи (1) — (2). Покажем, что эта последовательность равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная на I.

$\blacktriangleright$ Имеем для любого $n\in\mathrm{N}$: $\psi_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}\psi_n'(t)\,dt$, $x\in I$.

У нас $\psi_n'(x)$ есть значение функции f в некоторой точке из $(\overline{P})$. Но $|f(x,y)|\le M$ всюду в $(\overline{P})$. Поэтому $|\psi_n'(x)|\le M$, $x\in I$, $n\in\mathrm{N}$. А тогда

$$|\psi_n(x)| = \left|y_0+\int_{x_0}^{x}\psi_n'(t)\,dt\right| \le |y_0| + \left|\int_{x_0}^{x}\psi_n'(t)\,dt\right| \le$$

$$\le |y_0| + M|x-x_0| \le |y_0| + Mh = M_1,\ x\in I, n\in\mathrm{N}.$$

Отметим, что число M_1 не зависит ни от x, ни от n. Следовательно, последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathrm{N}}$, $x\in I$ — равномерно ограниченная. Покажем, что она и равностепенно непрерывная на отрезке Пеано I.

Возьмем $\varepsilon>0$ — любое. Пусть x' и x'' — любые две точки из отрезка Пеано I. Рассмотрим разность $\psi_n(x'')-\psi_n(x')$. Имеем

$$\psi_n(x'')-\psi_n(x') = \int_{x_0}^{x''}\psi_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x'}\psi_n'(t)\,dt = \int_{x'}^{x''}\psi_n'(t)\,dt \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\psi_n(x'') - \psi_n(x')| = \left|\int_{x'}^{x''} \psi_n'(t)\,dt\right| \le M \cdot |x'' - x'|.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Если брать x' и x'' на отрезке I любыми, но такими, для которых $|x'' - x'| < \delta$, то будем иметь $|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| < M \cdot \delta \Rightarrow |\psi_n(x'') - \psi_n(x')| < \varepsilon$, $n \in \mathbf{N}$. Последнее означает, что последовательность $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in I$, равностепенно непрерывная на отрезке Пеано I. ◀

Замечание. В книге И.Г. Петровского "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений" приведено доказательство теоремы Арцела — Асколи: из всякой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на промежутке $[a, b]$ последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in [a, b]$, можно выделить подпоследовательность функций $\{f_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$, $x \in [a, b]$, равномерно сходящуюся на промежутке $[a, b]$.

Отметим, что если $f_{n_k}(x) \in C([a, b])$ и $f_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in [a, b]$, то предельная функция $f(x) \in C([a, b])$. Кроме того, если функции $f_{n_k}(x)$, $x \in [a, b]$, такие, что $|f_{n_k}(x)| \le M$, $x \in [a, b]$, то и $|f(x)| \le M$, $x \in [a, b]$.

Теорема Пеано (о существовании решения). Пусть дано уравнение:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и дано начальное условие:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in (D). \tag{2}$$

Тогда, если функция $f(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^2$, то задача (1) — (2) имеет хотя бы одно решение $y = \varphi(x)$, которое определено на отрезке Пеано $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

(Непрерывности функции $f(x, y)$ в области (D) достаточно для существования хотя бы одного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.)

▶ Введем в рассмотрение последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, обладающую свойством $\varepsilon_n > 0$, для любого $n \in \mathbf{N}$, и $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Пусть для любого $n \in \mathbf{N}$ построена ломаная Эйлера $y = \psi_n(x)$, $x \in I$, такая, что она является ε_n-решением задачи (1) — (2). Следовательно, для любого $n \in \mathbf{N}$ имеет место соотношение

$$|\psi_n'(x) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon_n, \quad x \in I \tag{6}$$

(см. третье свойство ломаных Эйлера). Обозначим

$$\psi_n'(x) - f(x, \psi_n(x)) = \Delta_n(x), \quad x \in I. \tag{7}$$

У нас $\psi_n'(x)$ — кусочно-непрерывная на I, $f(x, \psi_n(x))$ — непрерывная на I, как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому функция $\Delta_n(x)$ — кусочно-непрерывная на I. Кроме того, из (6) следует, что: $\Delta_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in I$. Из (7) находим: $\psi_n'(x) = f(x, \psi_n(x)) + \Delta_n(x)$, $x \in I$, $n \in \mathbf{N}$. Функции $\psi_n'(x)$ — интегрируемые на любом промежутке $[x_0, x] \subset I$. Интегрируя обе части последнего соотношения по x от x_0 до x, находим

$$\int_{x_0}^{x} \psi_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \psi_n(t))\,dt + \int_{x_0}^{x} \Delta_n(t)\,dt, x \in I, n \in \mathbf{N}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi_n(t))\,dt + \int_{x_0}^{x} \Delta_n(t)\,dt, x \in I, n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

У нас последовательность $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, $x \in I$, — последовательность ломаных Эйлера. Было показано, что она равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная на отрезке Пеано I. Но тогда по теореме Арцела — Асколи она имеет подпоследовательность $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$, $x \in I$, обладающую свойством: $\psi_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x \in I$; $\varphi(x) \in C(I)$. Известно, что для любого $n \in \mathbf{N}$: $|\psi_n(x) - y_0| \le b$, $x \in I$. Следовательно, $|\psi_{n_k}(x) - y_0| \le b$, $x \in I$, для любого $k \in \mathbf{N}$. Значит, и $|\varphi(x) - y_0| \le b$, $x \in I$. Отметим, что

$$\psi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, \psi_{n_k}(t)\right)dt + \int_{x_0}^{x} \Delta_{n_k}(t)\,dt, x \in I, \ k \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Докажем, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I$, является решением задачи (1) — (2) на отрезке Пеано. У нас $\psi_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x \in I$. Покажем, что тогда $f\left(x, \psi_{n_k}(x)\right) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f(x, \varphi(x))$, $x \in I$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию, функция $f(x,y) \in C(D) \Rightarrow f(x,y) \in C(\bar{P}) \Rightarrow f(x,y)$ равномерно непрерывна в $(\bar{P}) \Rightarrow$ Взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что как только $|x'' - x'| < \delta$ и $|y'' - y'| < \delta$, так сейчас же $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$. (Точки (x', y') и $(x'', y'') \in (\bar{P})$.) Так как $\psi_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x \in I$, то числу $\delta > 0$, найденному по ε, отвечает номер K, такой, что как только $k > K$, так сейчас же $|\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < \delta$, для всех $x \in I$.

Рассмотрим разность $f(\underbrace{x, \psi_{n_k}(x)}_{(\cdot) p_{n_k} \in (\bar{P})}) - f(\underbrace{x, \varphi(x)}_{(\cdot) p \in (\bar{P})})$. Имеем

$x_{p_{n_k}} - x_p = x - x = 0$, $\left|y_{p_{n_k}} - y_p\right| = |\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < \delta$, для $x \in I$, если $k > K$. А тогда $\left|f\left(x, \psi_{n_k}(x)\right) - f\left(x, \varphi(x)\right)\right| < \varepsilon$, для всех $x \in I$, если $k > K$. Последнее означает, что $f\left(x, \psi_{n_k}(x)\right) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f\left(x, \varphi(x)\right)$, $x \in I$.

Но тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \psi_{n_k}(t)dt) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\lim\limits_{k\to\infty} f(t, \psi_{n_k}(t))\right) dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt.$

Покажем теперь, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \Delta_{n_k}(t)dt = 0$. Было отмечено выше,

что $\Delta_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in I$. Следовательно, $\Delta_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in I$. Это означает, что любому сколь угодно малому $\varepsilon > 0$ отвечает номер K, такой что при $k > K$ будет $|\Delta_{n_k}(x)| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in I$.

Тогда при $k > K$: $\left|\int\limits_{x_0}^{x} \Delta_{n_k}(t)dt\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\Delta_{n_k}(t)| dt\right| < \varepsilon |x - x_0| \le \varepsilon h$. Значит

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \Delta_{n_k}(t)dt = 0.$$

В соотношении (9) перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, \varphi(t)\right) dt + 0, \quad x \in I. \tag{10}$$

Из (10) видим, что $\varphi(x_0)=y_0$ и что $\int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$, $x\in I$ — есть интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. По теореме Барроу, существует производная правой части (10), равная $f(x,\varphi(x))$ для $x\in I$. Но тогда существует производная и левой части (10): $\varphi'(x)$, причем

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)),\quad x\in I.$$

Таким образом, получили: функция $y=\varphi(x)$, $x\in I$, — решение задачи (1) — (2) на отрезке Пеано I. ◀

§3. Единственность решения задачи Коши

1°. Лемма Гронуола. Пусть

1) функция $f(x)\in C(\langle a,b\rangle)$;

2) $f(x)$ удовлетворяет на $\langle a,b\rangle$ неравенству $0\le f(x)\le\lambda+\mu\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right|$, где $\lambda\ge 0$, $\mu>0$ — постоянные числа.

Тогда справедливо неравенство

$$0\le f(x)\le\lambda e^{\mu|x-x_0|},\ x\in\langle a,b\rangle.$$

▶ Доказательство проведем для $x\in[x_0,b\rangle$ (для $x\in\langle a,x_0]$ оно — аналогичное).

1-й случай: $\lambda>0$.

Имеем по условию: $0\le f(x)\le\lambda+\mu\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x\in[x_0,b\rangle$. Положим $g(x)=\lambda+\mu\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x\in[x_0,b\rangle$. Нетрудно понять, что

$g(x)\in C^1([x_0,b\rangle)$; $g(x_0)=\lambda>0$. Имеем $g'(x)=\mu f(x)\ge 0$, $x\in[x_0,b\rangle\Rightarrow$ $g(x)$ — неубывающая на промежутке $[x_0,b\rangle\Rightarrow$ $g(x)\ge\lambda>0$, $x\in[x_0,b\rangle$. Так как $g'(x)=\mu f(x)$, а $f(x)\le g(x)$, $x\in[x_0,b\rangle$, то $g'(x)\le\mu\cdot g(x)$, $x\in[x_0,b\rangle$, $\Rightarrow$ $\dfrac{g'(x)}{g(x)}\le\mu$, $x\in[x_0,b\rangle$.

Проинтегрировав последнее неравенство по отрезку $[x_0,x]\subset[x_0,b\rangle$, получаем

$$\ln\frac{g(x)}{g(x_0)}\le\mu(x-x_0),\, x\in[x_0,b\rangle\ \Rightarrow\ \frac{g(x)}{g(x_0)}\le e^{\mu(x-x_0)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)\le\underbrace{g(x_0)}_{=\lambda}e^{\mu(x-x_0)}=\lambda e^{\mu(x-x_0)}.$$

Следовательно, и подавно $0\le f(x)\le\lambda e^{\mu(x-x_0)}$, $x\in[x_0,b\rangle$.

2-й случай: $\lambda=0$.

Имеем по условию в этом случае $0\le f(x)\le\mu\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,dt$, $x\in[x_0,b\rangle$.

Возьмем последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — любую, но такую, что $\lambda_n>0$ для любого $n\in\mathbb{N}$ и $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ будем иметь $0\le f(x)<\lambda_n+\mu\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,dt$, $x\in[x_0,b\rangle$. Так как функция $f(x)$ удовлетворяет последнему неравенству, то получаем предыдущий случай. Следовательно, будем иметь $0\le f(x)\le\lambda_n e^{\mu(x-x_0)}$, $x\in[x_0,b\rangle$, $n\in\mathbb{N}$ — любое. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$ и приняв во внимание, что $\lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, получим $f(x)\equiv0$, $x\in[x_0,b\rangle$. Видим, что и в этом случае лемма доказана. ◀

Определение. Говорят, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет в области (D) *условию Липшица* по y, если существует число $L>0$ такое, что для любых двух точек $(x,\bar{y})$ и $(x,\bar{\bar{y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$\left|f(x,\bar{\bar{y}})-f(x,\bar{y})\right|\le L\cdot\left|\bar{\bar{y}}-\bar{y}\right|.$$

Пишут $f(x,y)\in\mathrm{Lip}_y(D)$.

2°. Теорема единственности. Пусть дано уравнение

$$y'=f(x,y)\tag{1}$$

и дано начальное условие

$$y\big|_{x=x_0}=y_0.\tag{2}$$

Пусть функция $f(x,y)\in C(D)$ и точка $(x_0,y_0)\in(D)$. Если существует окрестность $U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) такая, что

$f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y(U(x_0,y_0))$, то задача (1) — (2) имеет единственное решение.

▶ Что задача (1) — (2) имеет решение — это следует из теоремы Пеано. Нужно доказать, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. Рассуждаем от противного, а именно предполагаем, что задача (1) — (2) имеет не одно, а несколько решений. Возьмем тогда два любых решения задачи (1) — (2):

$$y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in I_{\tilde{h}} = [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}];$$

$$y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x), \quad x \in I_{\tilde{\tilde{h}}} = [x_0 - \tilde{\tilde{h}}, x_0 + \tilde{\tilde{h}}].$$

Так как $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{h}}$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}$, — решения задачи (1) — (2), то

$$\tilde{\varphi}'(x) \equiv f(x, \tilde{\varphi}(x)), x \in I_{\tilde{h}};$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}'(x) \equiv f\left(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right), x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}.$$

В левых и правых частях этих тождеств стоят функции, непрерывные соответственно в промежутках $I_{\tilde{h}}$ и $I_{\tilde{\tilde{h}}}$. Интегрируя обе части первого тождества по промежутку $[x_0, x] \subset I_{\tilde{h}}$, а обе части второго — по промежутку $[x_0, x] \subset I_{\tilde{\tilde{h}}}$, получим

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{\varphi}(x))\, dx, x \in I_{\tilde{h}};$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right) dx, \quad x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}.$$

Пусть $\tilde{I} = I_{\tilde{h}} \cap I_{\tilde{\tilde{h}}}$. Ясно, что точка $x_0 \in \tilde{I}$. Для $x \in \tilde{I}$ вычтем из второго тождества соответствующие части первого тождества. Получим

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f\left(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right) - f(x, \tilde{\varphi}(x)) \right] dx, x \in \tilde{I}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right) - f(x, \tilde{\varphi}(x)) \right| dx \right|, \quad x \in \tilde{I}.$$

По условию, существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y(U(x_0,y_0))$. Пусть отрезок $I \subset \tilde{I}$ ($x_0 \in I$) и такой, что для любого $x \in I$ оказывается: точки $(x, \tilde{\varphi}(x))$ и $\left(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right)$ принадлежат $U(x_0, y_0)$. Тогда для $x \in I$:

$\left|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right| \le \left|\int\limits_{x_0}^{x} L\cdot\left|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right| dx\right|$, где L — постоянная Липшица функции $f(x,y)$ в области $U(x_0,y_0)$. Введем обозначение: $\left|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right| = f(x)$, $x\in I$. Тогда предыдущее неравенство запишется в виде

$$0\le f(x)\le L\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx\right|,\ x\in I.$$

Видим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуола при $\lambda=0$ и $\mu=L$.

Так как $\lambda=0$, то из леммы Гронуола следует, что $f(x)\equiv 0$, $x\in I$, а это означает, что $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\equiv\tilde{\varphi}(x)$, $x\in I$.

Итак, показано, что существует промежуток I, содержащий точку x_0, на котором совпадают любые два решения задачи (1) — (2). Последнее означает, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. ◀

Следствие теоремы единственности. Пусть дано уравнение: $y'=f(x,y)$. Пусть функция $f(x,y)\in C(D)$. Пусть $(D_1)\subset(D)$, и частная производная $f_y'(x,y)\in C(D_1)$. Тогда (D_1) является областью единственности данного уравнения.

▶ Возьмем любую точку (x_0,y_0) в области (D_1) и покажем, что эта точка есть точка единственности данного уравнения. Для этого достаточно показать, что существует окрестность $U(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) такая, что $f(x,y)\in \mathrm{Lip}_y\,(U(x_0,y_0))$. Возьмем некоторую окрестность $V(x_0,y_0)$, такую, что $V(x_0,y_0)\subset(D_1)$. (Это сделать можно, ибо (D_1) — область.) А затем возьмем окрестность $U(x_0,y_0)$ меньшего радиуса. Тогда замкнутый круг, т. е. круг $\bar{U}(x_0,y_0)\subset V(x_0,y_0)\subset(D_1)$. По условию $f_y'(x,y)\in C(D_1)\Rightarrow$ $f_y'(x,y)\in C\left(\bar{U}(x_0,y_0)\right)\Rightarrow f_y'(x,y)$ — ограниченная в $\bar{U}(x_0,y_0)$. Значит, существует число $L>0$, такое, что $\left|f_y'(x,y)\right|\le L$ в $\bar{U}(x_0,y_0)$. Значит, $\left|f_y'(x,y)\right|\le L$ в $U(x_0,y_0)$.

Пусть (x,y_1) и (x,y_2) — любые две точки из $U(x_0,y_0)$. Имеем по теореме Лагранжа

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=f_y'(x,\tilde{y})(y_2-y_1),\quad \text{где}\quad \tilde{y}\in(y_1,y_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right| = \left|f_y'(x,\tilde{y})\right|\cdot\left|y_2-y_1\right|\le L\left|y_2-y_1\right|.$$

Последнее означает, что $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y(U(x_0,y_0))$, а значит, точка (x_0,y_0) является точкой единственности для уравнения $y' = f(x,y)$. Так как точка (x_0,y_0) — любая из (D_1), то (D_1) является областью единственности этого уравнения.

Теперь теорема существования и единственности для уравнения первого порядка может быть сформулирована так.

Пусть имеется уравнение $y' = f(x, y)$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $(D) \subset \mathrm{R}^2$ и имеет в (D) непрерывную частную производную $f'_y(x,y)$, то для любой точки $(x_0,y_0) \in (D)$ задача (1)—(2) имеет единственное решение.

§4. Общее, частное и особое решения уравнения $y' = f(x,y)$

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

где $f(x,y) \in C(D)$; $(D) \subset \mathrm{R}^2$.

I. Пусть $(D_1) \subset (D)$ и (D_1) — область единственности для уравнения (1). Пусть функция $y = \varphi(x,C)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x в области (Δ) плоскости (x, C). Пусть $\Delta_C = \text{пр}_C(\Delta)$.

Определение. Функция $y = \varphi(x,C)$ называется *общим решением* уравнения (1) в области (D_1), если, во-первых, для любой точки $(x_0,y_0) \in (D_1)$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0,C)$ имеет одно и только одно решение $C = C_0$ (причем $C_0 \in \Delta_C$, т. е. C_0 — допустимое значение для C), и если, во-вторых, функция $y = \varphi(x,C_0)$, $x \in I_\delta$ ($I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) оказывается решением уравнения (1) хотя бы при достаточно малом δ. (Ясно, что это решение удовлетворяет условию $y|_{x=x_0} = y_0$.)

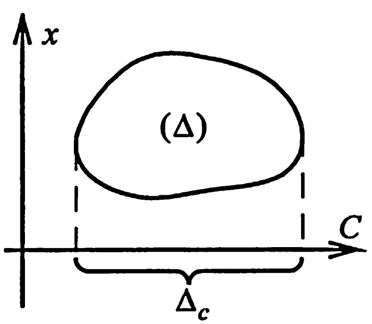

Рис. 1.9. К определению общего решения уравнения (1)

Геометрически общее решение уравнения (1) представляет собой однопараметрическое семейство интегральных кривых, определяемых уравнением $y = \varphi(x,C)$, которые покрывают всю область (D_1).

(Так как через любую точку $(x_0, y_0) \in (D_1)$ проходит некоторая интегральная кривая из семейства $y = \varphi(x, C)$, то общее решение уравнения (1) определяет в любой точке $(x_0, y_0) \in (D_1)$ линейный элемент (касательную к интегральной кривой в точке (x_0, y_0)). Следовательно, по общему решению уравнения (1) можно построить в области (D_1) поле направлений.)

II. Определение. Функция $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, называется *частным решением* уравнения (1), если:

1) эта функция является решением уравнения (1) в (a, b);

2) каждая точка интегральной кривой (т. е. каждая точка графика функции $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$) является точкой единственности для уравнения (1).

Заметим, что если $y = \varphi(x, C)$ — общее решение уравнения (1) в (D_1), то частные решения этого уравнения в (D_1) получаются из общего при конкретных числовых значениях C (каждое частное решение при своем числовом значении C).

С геометрической точки зрения частное решение есть интегральная кривая, проходящая через заранее заданную точку $(x_0, y_0) \in (D_1)$.

В приведенном ранее примере 2, §1, частными решениями уравнения $y' = 3y^{2/3}$ будут части кубических парабол, расположенные в открытой верхней полуплоскости, и части кубических парабол, расположенные в открытой нижней полуплоскости.

III. Определение. Функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, называется *особым решением* уравнения (1) в области (D), если:

1) эта функция является решением уравнения (1) в (a, b);

2) каждая точка интегральной кривой (т. е. каждая точка графика функции $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$) является точкой неединственности для уравнения (1).

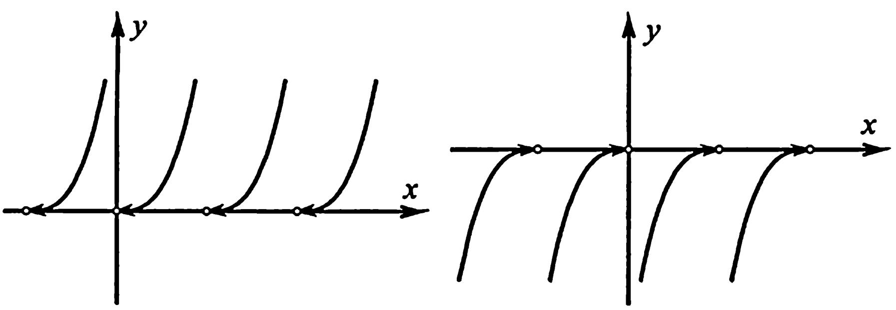

Рис. 1.10. К определению частного решения уравнения (1)

Заметим, что особое решение уравнения (1) не может быть получено из общего решения этого уравнения ни при каком конкретном (допустимом) числовом значении C.

В примере 1, §1, решение $y \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является особым решением уравнения $y' = 3y^{2/3}$.

§5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

1°. *Дифференциальным уравнением первого порядка в симметричной форме* называется уравнение вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1)$$

где $M(x,y) \in C(D)$ и $N(x,y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Определение.

I. *Решением* уравнения (1) называется всякая функция вида:

$$y = \varphi(x), \quad x \in \langle a,b \rangle, \qquad (2_{\mathrm{I}})$$

которая удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x) \in C^1(\langle a,b \rangle)$;

2) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ при любом $x \in \langle a,b \rangle$;

3) $M(x,\varphi(x))\,dx + N(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx \equiv 0$, $x \in \langle a,b \rangle$ и для любого dx.

II. *Решением* уравнения (1) называется также всякая функция вида

$$x = \psi(y), \quad y \in \langle c,d \rangle, \qquad (2_{\mathrm{II}})$$

которая удовлетворяет условиям:

1) $\psi(y) \in C^1(\langle c,d \rangle)$;

2) точка $(\psi(y), y) \in (D)$ при любом $y \in \langle c,d \rangle$;

3) $M(\psi(y), y) \cdot \psi'(y)dy + N(\psi(y), y)\,dy \equiv 0$, $y \in \langle c,d \rangle$ и для любого dy.

Пусть (x,y) — произвольная точка области (D). Пусть $\vec{F}(x,y) = (M(x,y); N(x,y))$. Будем считать этот вектор приложенным в точке (x,y). Таким образом в области (D) будет задано непрерывное векторное поле.

Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D)$ и такая, что $\vec{F}(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. В этой точке вектор $\vec{F}$ имеет вполне определенное направление. Такая точка называется *обыкновенной точкой* поля вектора $\vec{F}$, а отсюда и обыкновенной точкой уравнения (1).

Если же $\vec{F}(x_0, y_0) = \vec{0}$, то точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* поля вектора $\vec{F}$, а значит, и особой точкой уравнения (1).

Пусть (H) — совокупность всех особых точек поля вектора $\vec{F}$ в области (D). Покажем, что (H) — замкнутое множество в (D). Для этого рассмотрим функцию $h(x,y)=M^2(x,y)+N^2(x,y)$. Ясно, что $h(x,y)\in C(D)$ и что $h(x,y)\equiv 0$ в (H). Пусть точка $(x_0,y_0)\in(D)$ и является предельной для множества (H). Но тогда существует последовательность точек (x_k,y_k), $k\in\mathbb{N}$, такая, что $(x_k,y_k)\in(H)$ для любого $k\in\mathbb{N}$; $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$ для любого $k\in\mathbb{N}$; $(x_k,y_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}(x_0,y_0)$. В силу непрерывности функции $h(x,y)$, $h(x_k,y_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}h(x_0,y_0)$. У нас $h(x_k,y_k)=0$ при любом $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, $h(x_0,y_0)=0\Rightarrow$ точка $(x_0,y_0)\in(H)$. Множество, которое содержит все свои предельные точки, является замкнутым. Значит, множество (H) — замкнутое.

Рассмотрим произвольное решение уравнения (1). Пусть это решение есть решение вида (2_1). Тогда, в частности, справедливо тождество

$$M\,(x,\varphi(x))\,dx+N\,(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx\equiv 0, x\in\langle a,b\rangle,\ dx\text{ — любое.}\quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение векторы $\vec{F}(x,\varphi(x))=\big(M\,(x,\varphi(x));\ N\,(x,\varphi(x))\big)$ и $\vec{T}(x)=\big(dx;\varphi'(x)dx\big)$, то левую часть тождества (3) можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\vec{F}(x,\varphi(x))$ и $\vec{T}(x)$.

Выясним геометрический смысл вектора $\vec{T}(x)$.

Заметим, что решение вида (2_1) уравнения (1) можно считать заданным параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x,\\ y=\varphi(x),\end{cases}$ $x\in\langle a,b\rangle$ (x — параметр). Тогда вектор $(x'_x,y'_x)=(1,\varphi'(x))$ является направляющим вектором касательной к интегральной кривой (2_1) в точке $(x,\varphi(x))$. В этом и состоит геометрический смысл вектора $\vec{T}(x)$. Так как соотношение (3) является условием ортогональности векторов $\vec{F}(x,\varphi(x))$ и $\vec{T}(x)$, то заключаем, что интегральная кривая (2_1) располагается в области (D) так, что в каждой своей точке $(x,\varphi(x))$ она ортогональна вектору $\vec{F}(x,\varphi(x))$.

Пример. Пусть дано уравнение

$$xdx+ydy=0.\qquad (1_0)$$

Здесь $M(x,y)\equiv x$; $N(x,y)\equiv y$; $M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$. M и N обращаются одновременно в нуль лишь в точке (0, 0). Значит,

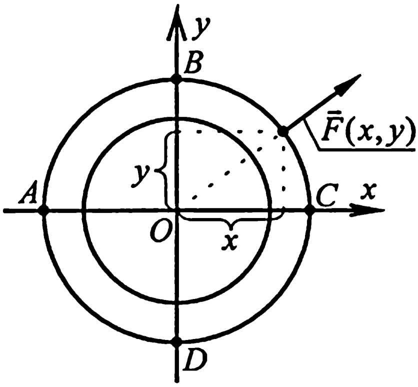

Рис. 1.11. К примеру об ортогональности вектора $\vec F(x, \varphi(x))$ к интегральным кривым

$H = \{(0,0)\}$; $(D) \setminus (H) = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. В любой точке $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ вектор $\vec F(M,N) = \vec F(x,y)$. Интегральными кривыми уравнения (1_0) являются окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 1.11). Здесь: открытая дуга $\smile ABC$ — график решения уравнения вида $(2_{\rm I})$; открытая дуга $\smile BCD$ — график решения уравнения вида $(2_{\rm II})$; открытая дуга $\smile BC$ — график решения уравнения и вида $(2_{\rm I})$, и вида $(2_{\rm II})$ (значит, эти решения взаимно обратны).

Замечание. Пусть функция $\mu(x,y) \in C(D)$ и $\mu(x,y) \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\underbrace{\mu(x,y)M(x,y)}_{=M_1(x,y)}\,dx + \underbrace{\mu(x,y)N(x,y)}_{=N_1(x,y)}\,dy = 0. \qquad (\tilde 1)$$

Очевидно, что уравнение $(\tilde 1)$ равносильно уравнению (1). Следовательно, уравнения (1) и $(\tilde 1)$ имеют одинаковые решения. Векторное поле в $(D) \setminus (H)$ для уравнения $(\tilde 1)$ задается вектором $\vec F_1(M_1(x,y), N_1(x,y))$. Ясно, что в любой точке области $(D) \setminus (H)$ векторы $\vec F_1$ и $\vec F$ коллинеарны ($\vec F_1 \parallel \vec F$). $\Rightarrow$ вектор $\vec F_1$ определяет вектор $\vec F$ с точностью до направления.

2°. Существование решения уравнения (1). Пусть точка (x_0, y_0) — обыкновенная точка уравнения (1), т. е. точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$. Это означает, что $\vec F(x_0, y_0) \neq \vec 0$. Следовательно, хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, y_0)$ отлично от нуля. Могут реализоваться следующие случаи.

I случай. $M(x_0, y_0) = 0$; $N(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда по теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0): $U(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что $N(x, y) \neq 0$ в $U(x_0, y_0)$. Умножим обе части уравнения (1) на множитель $\mu(x, y) = \dfrac{1}{N(x, y)}$ ($\mu(x, y) \in C(U)$ и $\mu(x, y) \neq 0$ в $U(x_0, y_0)$). Получим уравнение, равносильное уравнению (1), а именно

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} dx + dy = 0 \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \; (= f(x, y), f \in C(U)). \quad (3)$$

Уравнение (3) разрешено относительно y'. Так как уравнение (3) удовлетворяет условиям теоремы Пеано, то оно имеет хотя бы одно решение $y = \varphi(x)$, $x \in I$; $x_0 \in I$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Видим, что в рассматриваемом случае уравнение (1) имеет решение вида (2_{I}). Покажем, что в рассматриваемом случае уравнение (1) не имеет решения вида (2_{II}), удовлетворяющего условию $x\big|_{y=y_0} = x_0$.

Рассуждаем от противного, а именно допустим, что уравнение (1) имеет решение вида (2_{II}), удовлетворяющее начальному условию $x\big|_{y=y_0} = x_0$. Но тогда для $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ и при любом dy справедливо тождество:

$$M(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) dy + N(\psi(y), y)\, dy \equiv 0.$$

Положив здесь $y = y_0$, получим

$$\underbrace{\underbrace{M(x_0, y_0)}_{=0} \cdot \underbrace{\psi'(y_0)}_{=\text{const}}}_{=0} + \underbrace{N(x_0, y_0)}_{\text{const}, \neq 0} = 0.$$

Видим, что это равенство невозможно. Значит, наше предположение, что уравнение (1) имеет решение вида (2_{II}) неверно.

II случай. $M(x_0, y_0) \neq 0$, $N(x_0, y_0) = 0$.

По теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0): $V(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что $M(x, y) \neq 0$ в $V(x_0, y_0)$, а потому вместо уравнения (1) будем иметь равносильное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \; (= g(x, y); g(x, y) \in C(V)). \quad (\tilde{3})$$

Уравнение $(\tilde{3})$ разрешено относительно x'_y. По теореме Пеано заключаем, что через точку (x_0, y_0) проходит хотя бы одно решение уравнения $(\tilde{3})$ (а значит, уравнения (1)). Это решение будет решением вида (2_{II}): $x = \psi(y)$, $y \in \tilde{I} = (y_0 - \tilde{\delta}, y_0 + \tilde{\delta})$; $\psi(y_0) = x_0$. Отметим, что решения вида (2_I) уравнение (1) в этом случае не имеет (это устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, которые проведены при рассмотрении случая I).

III случай. $M(x_0, y_0) \neq 0$; $N(x_0, y_0) \neq 0$.

В этом случае по теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0): $W(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что в $W(x_0, y_0)$ одновременно $M(x, y) \neq 0$ и $N(x, y) \neq 0$. А тогда в $W(x_0, y_0)$ уравнение (1) может быть записано как в виде (3), так и в виде $(\tilde{3})$. И, следовательно, по теореме Пеано уравнение (1) имеет как решение вида (2_I): $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; $\varphi(x_0) = y_0$, так и решения вида (2_{II}): $x = \psi(y)$, $y \in (y_0 - \tilde{\delta}, y_0 + \tilde{\delta})$; $\psi(y_0) = x_0$. Покажем, что при соответствующем подборе интервалов эти решения взаимно обратны.

Действительно, пусть $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, — решение уравнения (3) такое, что $\varphi(x_0) = y_0$. Будем считать δ настолько малым, что $(x, \varphi(x)) \in W(x_0, y_0)$ для $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))} \neq 0, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \text{ функция } y = \varphi(x)$$

строго монотонна на интервале $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и, следовательно, по теореме о существовании обратной функции, имеет обратную функцию $x = \psi(y)$, $y \in I_{\tilde{\delta}} = (y_0 - \tilde{\delta}, y_0 + \tilde{\delta})$, причем $\psi(y_0) = x_0$ ($I_{\tilde{\delta}}$ — образ I_δ при отображении φ). Покажем, что функция $x = \psi(y)$, $y \in I_{\tilde{\delta}}$, является решением уравнения $(\tilde{3})$. По теореме о связи между производными взаимнообратных функций, имеем для любого $y \in I_{\tilde{\delta}}$:

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} \Rightarrow \psi'(y) \equiv \frac{1}{-\dfrac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))}} \equiv -\frac{N(\psi(y), y)}{M(\psi(y), y)}.$$

Последнее означает, что функция $x = \psi(y)$, $y \in I_{\tilde{\delta}}$, является решением уравнения $(\tilde{3})$, таким, что $\psi(y_0) = x_0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$, уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, проходящее через точку (x_0, y_0).

3°. Единственность решения уравнения (1).

Определение. Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D)$. Будем говорить, что уравнение (1) имеет единственное решение с начальными данными (x_0, y_0) в следующих случаях:

1) если оно имеет единственное решение вида (2_I) с этими начальными данными в том смысле, что любые два решения вида (2_I) совпадают в некоторой окрестности точки x_0;

2) если оно имеет единственное решение вида (2_II) с этими начальными данными в том смысле, что любые два решения вида (2_II) совпадают в некоторой окрестности точки y_0;

3) если оно имеет единственное решение с этими начальными данными как вида (2_I), так и вида (2_II).

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области (D) плоскости x, y. Говорят, что $f(x, y)$ удовлетворяет в (D) условию Липшица по x, y, если существует постоянная $L > 0$ такая, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из (D) выполняется неравенство $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \le L \cdot (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$.

Заметим, что если $f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(D)$, то одновременно $f(x, y) \in \text{Lip}_y(D)$ и $f(x, y) \in \text{Lip}_x(D)$.

Справедливо **утверждение**:

Если $f(x, y) \in C^1(D)$ ((D) — область, $(D) \subset \mathbb{R}^2$), то любая точка (x_0, y_0) из области (D) имеет окрестность $U(x_0, y_0)$ такую, что $f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(U(x_0, y_0))$.

▶ Возьмем в области (D) любую точку (x_0, y_0). Возьмем некоторую окрестность $V(x_0, y_0)$ такую, что $V(x_0, y_0) \subset (D)$ (это сделать можно, ибо (D) — область). Затем возьмем окрестность $U(x_0, y_0)$ такую, чтобы было $\bar{U}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$. По условию

$$f'_x(x, y),\quad f'_y(x, y) \in C(D) \Rightarrow\quad f'_x(x, y),\quad f'_y(x, y) \in C\left(\bar{U}(x_0, y_0)\right) \Rightarrow$$

$f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ — ограниченные в $\bar{U}(x_0, y_0)$. Значит, существует число $L > 0$ такое, что $|f'_x(x, y)| \le L$ и $|f'_y(x, y)| \le L$ всюду в $\bar{U}(x_0, y_0)$, а следовательно, и в $U(x_0, y_0)$.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — любые две точки из $U(x_0, y_0)$. Имеем

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = [f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)] + [f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)] =$$
$$= f'_x(\tilde{x}, y_2)(x_2 - x_1) + f'_y(x_1, \tilde{y})(y_2 - y_1)$$

$$(\tilde{x} \in (x_1, x_2); \tilde{y} \in (y_1, y_2)).$$

А тогда

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \le \underbrace{|f'_x(\tilde{x}, y_2)|}_{\le L} \cdot |x_2 - x_1| + \underbrace{|f'_y(x_1, \tilde{y})|}_{\le L} \cdot |y_2 - y_1| \le$$

$$\le L\left(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\right).$$

Последнее означает, что $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}\, U(x_0, y_0)$. ◀

Теорема единственности для уравнения (1). Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$, т. е. (x_0, y_0) — обыкновенная точка уравнения (1). Пусть существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $U(x_0, y_0) \subset (D) \setminus (H)$ и $M(x, y), N(x, y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}\,(U(x_0, y_0))$. Тогда точка (x_0, y_0) — точка единственности для уравнения (1).

▶ По условию точка (x_0, y_0) — обыкновенная точка для уравнения (1). Значит, хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, y_0)$ отлично от нуля. Пусть для определенности $N(x_0, y_0) \ne 0$. По теореме о стабильности знака заключаем, что существует окрестность $V(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $N(x, y) \ne 0$ в $V(x_0, y_0)$. (Можно считать, что $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$.)

Но тогда в $V(x_0, y_0)$ уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \; (= f(x, y), f(x, y) \in C(V)). \tag{3}$$

Покажем, что существует окрестность $W(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y\,(W(x_0, y_0))$.

Пусть W — окрестность точки (x_0, y_0) такая, что $\bar{W}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$, а значит, $\bar{W}(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$. У нас функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ — непрерывные в области (D). Значит, они непрерывные в ограниченной замкнутой области $\bar{W}(x_0, y_0)$. $\Rightarrow$ $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — ограниченные в $\bar{W}(x_0, y_0) \Rightarrow$ Существует число $m > 0$ такое, что $|M(x, y)| \le m$ и $|N(x, y)| \le m$ в $\bar{W}(x_0, y_0)$. У нас $N(x, y) \ne 0$ в $V(x_0, y_0)$. Так как $\bar{W}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$, то $N(x, y) \ne 0$ в $\bar{W}(x_0, y_0) \Rightarrow$ существует число $K > 0$ такое, что $|N(x, y)| \ge K$ в $\bar{W}(x_0, y_0)$.

По условию, $M(x, y), N(x, y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}\,(U(x_0, y_0))$. Так как $W(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$, то $M(x, y), N(x, y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}\,(W(x_0, y_0))$. Возьмем любые две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в $W(x_0, y_0)$ и рассмотрим разность $f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$. Имеем

$$|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=\left|\frac{M(x_2,y_2)}{N(x_2,y_2)}-\frac{M(x_1,y_1)}{N(x_1,y_1)}\right|=$$

$$=\frac{|M(x_2,y_2)N(x_1,y_1)-M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)|}{|N(x_1,y_1)|\cdot|N(x_2,y_2)|}\le$$

$$\le\frac{1}{K^2}|M(x_2,y_2)N(x_1,y_1)-M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)|=$$

$$=\frac{1}{K^2}\big|\,[M(x_2,y_2)N(x_1,y_1)-M(x_1,y_1)N(x_1,y_1)]+$$

$$+[M(x_1,y_1)N(x_1,y_1)-M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)]\big)\le$$

$$\le\frac{m}{K^2}\left[|M(x_2,y_2)-M(x_1,y_1)|+|N(x_2,y_2)-N(x_1,y_1)|\right]\le$$

$$\le\frac{2mL}{K^2}\left(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|\le\tilde{L}\cdot\left(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|\right),$$

где $\tilde{L}=\dfrac{2mL}{K^2}$ — число, большее нуля. Последнее означает, что $f(x,y)\in \mathrm{Lip}_{x,y}(W(x_0,y_0))\Rightarrow\ f(x,y)\in \mathrm{Lip}_y(W(x_0,y_0))$. А тогда по теореме единственности для уравнения, разрешенного относительно производной, получаем, что точка (x_0,y_0) — точка единственности для уравнения (3). Покажем, что из этого следует, что точка (x_0,y_0) — точка единственности для уравнения (1). В самом деле, у нас $N(x_0,y_0)\ne 0$. Могут иметь место следующие два случая:

1) $M(x_0,y_0)=0$. В этом случае, как мы знаем, уравнение (1) не имеет решения вида (2_{II}) с начальными данными (x_0,y_0), а решение вида (2_I) — единственное. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение.

2) $M(x_0,y_0)\ne 0$. В этом случае уравнение (1) может быть представлено как в виде (3), так и в виде $(\tilde{3})$. Значит, уравнение (1) имеет как решение вида (2_I), так и решение вида (2_{II}). Для уравнения (3) единственность доказана; совершенно аналогично устанавливается единственность для уравнения $(\tilde{3})$. Выше было

показано, что при соответствующем подборе интервалов для решений вида (2_{I}) и (2_{II}) эти решения взаимно обратны. Следовательно, и в этом случае уравнение (1) имеет единственное решение с начальными данными (x_0, y_0). ◀

Следствие. Если функции $M(x,y), N(x,y) \in C^1(D)$, то любая точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ является точкой единственности для уравнения (1).

▶ Действительно, в этом случае любая точка (x_0, y_0) имеет окрестность $U(x_0, y_0) \subset (D)$ такую, что $M(x,y), N(x,y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}(U)$. Но если точка (x_0, y_0) — обыкновенная, то в ней хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, y_0)$ отлично от нуля, т. е. выполнены условия теоремы единственности. ◀

§6. Общий интеграл уравнения в симметричной форме

1°. Некоторые сведения из теории неявных функций. Пусть функция $F(x,y)$ определена в области (D) плоскости x, y. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y) = 0. \qquad (*)$$

Говорят, что уравнение (*) определяет y как функцию от x, если существуют интервал I оси Ox и функция $y = \varphi(x)$, такие, что:

1) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ при любом $x \in I$;

2) $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$, $x \in I$.

При этом функция $y = \varphi(x)$, $x \in I$, называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (*).

Имеют место следующие теоремы:

I. 1) Пусть функция $F(x,y)$ определена, непрерывна в прямоугольнике $(\bar{P}) = \begin{cases} x_0 - A \le x \le x_0 + A, \\ y_0 - B \le y \le y_0 + B \end{cases}$ ($A > 0$, $B > 0$ — некоторые числа) и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$;

2) пусть $F(x_0, y_0) = 0$;

3) пусть $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$.

Тогда существуют числа a и b ($0 < a \le A$; $0 < b \le B$) такие, что:

α) каждому x из $[x_0 - a, x_0 + a]$ отвечает одно и только одно y из $[y_0 - b, y_0 + b]$ такое, что $F(x,y) = 0$, т. е. $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, причем $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$;

β) $\varphi(x_0) = y_0$;

γ) $\varphi(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$;

δ) для любого $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существует непрерывная производная $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial y}}$.

II. 1) Пусть функция $F(x, y)$ определена, непрерывна в прямоугольнике $(\overline{P})$ и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$;

2) пусть $F(x_0, y_0) = 0$;

3) пусть $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ ($0 < \tilde{a} \le A$, $0 < \tilde{b} \le B$) такие, что:

$\tilde{\alpha}$) каждому y из $[y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$ отвечает одно и только одно x из $[x_0 - \tilde{a}, x_0 + \tilde{a}]$ такое, что $F(x, y) = 0$, т. е. $x = \psi(y)$, $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$, причем $F(\psi(y), y) \equiv 0$, $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$;

$\tilde{\beta}$) $\psi(y_0) = x_0$;

$\tilde{\gamma}$) $\psi(y) \in C\left([y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]\right)$;

$\tilde{\delta}$) для любого $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$ существует непрерывная производная $\psi'(y)$, причем $\psi'(y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F(\psi(y), y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(\psi(y), y)}{\partial x}}$.

Замечание. Если уравнение (*) такое, что выполняются одновременно условия теорем I и II, то это уравнение (рассматриваемое в достаточно малой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0)) определяет неявные функции:

$$y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$(\varphi(x_0) = y_0; \ \varphi(x) \in C(I_\delta); \ \varphi'(x) \in C(I_\delta))$$

и

$$x = \psi(y), \quad y \in I_{\tilde{\delta}} = (y_0 - \tilde{\delta}, y_0 + \tilde{\delta})$$

$$(\psi(y_0) = x_0; \ \psi(y) \in C(I_{\tilde{\delta}}); \ \psi'(y) \in C(I_{\tilde{\delta}})),$$

которые являются взаимно обратными.

2°. Определение общего интеграла уравнения в симметричной форме. Пусть имеется дифференциальное уравнение в симметричной форме

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^2$.

Определение. Пусть функция $u(x,y) \in C^1(D)$ и пусть C — произвольное постоянное число из множества допустимых значений. (Допустимыми значениями C являются значения функции $u(x,y)$ в (D).)

I. Соотношение

$$u(x,y) = C \qquad (2)$$

называется *общим интегралом* уравнения (1) в области (D), если, во-первых, для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ (т. е. для любой обыкновенной точки уравнения (1)) уравнение:

$$u(x,y) = u(x_0, y_0), \qquad (3)$$

рассматриваемое в достаточно малой области $U(x_0, y_0)$, определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию:

$$y = \varphi(x), \ \ x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \qquad (4)$$

такую, что $\varphi(x_0) = y_0$, $u(x, \varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0)$, $x \in I_\delta$, и если, во-вторых, функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, хотя бы при достаточно малом δ является решением уравнения (1).

II. Соотношение (2) также называется общим интегралом уравнения (1) в области (D), если, во-первых, для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ уравнение (3), рассматриваемое в достаточно малой области $U(x_0, y_0)$, определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию:

$$x = \psi(y), \ \ y \in I_{\tilde\delta} = (y_0 - \tilde\delta, y_0 + \tilde\delta), \qquad (5)$$

такую, что $\psi(y_0) = x_0$, $u(\psi(y), y) \equiv u(x_0, y_0)$, $y \in I_{\tilde\delta}$, и если, во-вторых, функция $x = \psi(y)$, $y \in I_{\tilde\delta}$, является решением уравнения (1) хотя бы при достаточно малом $\tilde\delta$.

Из определения общего интеграла уравнения (1) следует, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ общий интеграл (2) определяет хотя бы одно решение уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0). В частности, если $(D) \setminus (H)$ — область единственности для уравнения (1), то общий интеграл (2) содержит в себе все решения уравнения (1), графики которых лежат в $(D) \setminus (H)$.

Пусть $u(x,y)=C$ — общий интеграл уравнения (1) в области (D). Пусть точка (x_0,y_0) — любая из области (D). Рассмотрим уравнение $u(x,y)=u(x_0,y_0)$.

Справедливо **утверждение.**

Любая дифференцируемая неявная функция, определяемая этим уравнением, график которой лежит в области (D) (он может проходить и через особые точки уравнения (1)) является решением уравнения (1).

▶ Рассмотрим любую дифференцируемую неявную функцию $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$, определяемую уравнением $u(x,y)=u(x_0,y_0)$. Тогда, в частности, справедливо тождество

$$u(x,\varphi(x))\equiv u(x_0,y_0),\quad x\in(a,b). \tag{6}$$

Покажем, что справедливо тождество

$$M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\equiv 0,\quad x\in(a,b). \tag{7}$$

Для этого возьмем произвольную точку $x_1\in(a,b)$ и рассмотрим точку $(x_1,\varphi(x_1))$. Могут иметь место следующие два случая.

1) Точка $(x_1,\varphi(x_1))$ — обыкновенная точка уравнения (1). Для нее, в соответствии с (6), имеем $u(x_1,\varphi(x_1))=u(x_0,y_0)$. А тогда уравнение $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ может быть переписано в виде: $u(x,y)=u(x_1,y_1)$, где $y_1=\varphi(x_1)$. И, следовательно, функцию $y=\varphi(x)$ можно рассматривать как дифференцируемую неявную функцию, определяемую уравнением $u(x,y)=u(x_1,y_1)$ в окрестности точки x_1; причем точка (x_1,y_1) — обыкновенная точка уравнения (1). Согласно определению общего интеграла, функция $y=\varphi(x)$ на некотором интервале $I_\delta=(x_1-\delta,x_1+\delta)$ является решением уравнения (1), т. е. на I_δ справедливо тождество (7). В частности, (7) верно при $x=x_1$. У нас x_1 — любое из промежутка (a,b). Значит, (7) верно при любом x из (a,b). А это означает, что $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ является решением уравнения (1).

2) Точка $(x_1,\varphi(x_1))$ — особая точка уравнения (1). В этом случае $M(x_1,\varphi(x_1))=N(x_1,\varphi(x_1))=0$, а значит, (7) справедливо при $x=x_1$ и в этом случае. ◀

▶ **3°. Критерий общего интеграла.**

Теорема. Пусть функция $u(x,y)\in C^1(D)$, $(D)\subset\mathbb{R}^2$, и такая, что $\left(\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2\neq 0$ в $(D)\setminus(H)$. Тогда: для того, чтобы соотношение

$$u(x,y)=C \tag{*}$$

было общим интегралом уравнения (1) в (D), необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было:

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ M(x,y) & N(x,y) \end{vmatrix}=0\,. \tag{**}$$

▶ *Необходимость.* Дано: соотношение $u(x,y)=C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D). Требуется доказать, что $\Delta(x,y)\equiv 0$ в (D).

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in(D)$. Могут иметь место следующие два случая.

1) Точка (x_0,y_0) — особая точка уравнения (1). Но тогда $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0$ и, следовательно, $\Delta(x_0,y_0)=0$.

2) Точка (x_0,y_0) — обыкновенная точка уравнения (1). Но тогда, как мы знаем, общий интеграл уравнения: $u(x,y)=C$ определяет хотя бы одно решение уравнения (1) с начальными данными (x_0,y_0). Пусть это решение есть решение вида: $y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (эта функция является дифференцируемой неявной функцией, определяемой уравнением $u(x,y)=u(x_0,y_0)$, такой, что $\varphi(x_0)=y_0$; $u(x,\varphi(x))\equiv u(x_0,y_0)$, $x\in I_\delta$). Имеем, следовательно,

$$u(x,\varphi(x))\equiv u(x_0,y_0),\ \ x\in I_\delta, \tag{8}$$

и

$$M(x,\varphi(x))\,dx+N(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx\equiv 0,\ \ x\in I_\delta \tag{9}$$

(ибо $y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, — решение уравнения (1)). Дифференцируя тождество (8) по x, получим

$$u'_x(x,\varphi(x))+u'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\equiv 0,\ \ x\in I_\delta. \tag{10}$$

В частности, при $x=x_0$ будем иметь

$$u'_x(x_0,\varphi(x_0))+u'_y(x_0,\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)=0. \tag{10_0}$$

У нас тождество (9) имеет место при любом dx. Поэтому из (9) следует:

$$M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\equiv 0,\ \ x\in I_\delta. \tag{11}$$

Положив в (11) $x=x_0$, получаем

$$M(x_0,\varphi(x_0))+N(x_0,\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)=0\,. \tag{11_0}$$

Таким образом, имеем следующую однородную систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} u'_x(x_0,\varphi(x_0)) + u'_y(x_0,\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0) = 0, \\ M(x_0,\varphi(x_0)) + N(x_0,\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

В (12) $u'_x(x_0,\varphi(x_0))$, $u'_y(x_0,\varphi(x_0))$, $M(x_0,\varphi(x_0))$, $N(x_0,\varphi(x_0))$ — коэффициенты системы. Замечаем, что линейная однородная система (12) имеет решение, отличное от чисто нулевого, а именно: $(1,\varphi'(x_0)) \neq (0,0)$. Но последнее возможно лишь тогда, когда

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} u'_x(x_0,\varphi(x_0)) & u'_y(x_0,\varphi(x_0)) \\ M(x_0,\varphi(x_0)) & N(x_0,\varphi(x_0)) \end{vmatrix} = 0.$$

У нас точка (x_0,y_0) — любая из (D), следовательно, $\Delta(x,y)\equiv 0$ в (D). Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\Delta(x,y)\equiv 0$ в (D). Требуется доказать, что соотношение $u(x,y)=C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D).

Покажем, что соотношение $u(x,y)=C$ удовлетворяет определению общего интеграла. Для этого берем произвольную точку $(x_0,y_0)\in(D)\setminus(H)$ и рассматриваем уравнение: $u(x,y)=u(x_0,y_0)$. Перепишем это уравнение в виде:

$$\underbrace{u(x,y)-u(x_0,y_0)}_{=F(x,y)\ -\ \text{обозначение}} = 0. \tag{13}$$

Имеем:

1) $F(x,y)\in C^1(D)$ (так как $u(x,y)\in C^1(D)$);

2) $F(x_0,y_0)=0$.

По условию, $(u'_x(x,y))^2+(u'_y(x,y))^2\neq 0$ в $(D)\setminus(H)$. Так как точка $(x_0,y_0)\in(D)\setminus(H)$, то хотя бы одно из двух чисел $u'_x(x_0,y_0)$, $u'_y(x_0,y_0)$ не равно нулю. Будем считать для определенности, что $u'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Но тогда

3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Видим, что выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (13) (см. теорию неявных функций). По этой теореме уравнение (13) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ такую, что $\varphi(x_0)=y_0$ и

$$u(x,\varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0), \quad x \in I_\delta \tag{14}$$

(точка $(x,\varphi(x)) \in (D) \setminus (H)$, $x \in I_\delta$).

По условию, $\Delta(x,y) \equiv 0$ в $(D) \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} u'_x(x,\varphi(x)) & u'_y(x,\varphi(x)) \\ M(x,\varphi(x)) & N(x,\varphi(x)) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \tag{15}$$

Продифференцируем тождество (14) по x. Будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} u'_x(x,\varphi(x)) \cdot 1 + u'_y(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta; \\ \text{Из}(15) \Rightarrow u'_x(x,\varphi(x)) N(x,\varphi(x)) + \\ + u'_y(x,\varphi(x)) \cdot \left[-M(x,\varphi(x))\right] \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Рассматриваем эти два тождества как систему линейных однородных уравнений с коэффициентами: 1, $\varphi'(x)$, $N(x,\varphi(x))$, $-M(x,\varphi(x))$. Решениями этой системы для любого $x \in I_\delta$ являются: $u'_x(x,\varphi(x))$, $u'_y(x,\varphi(x))$.

У нас, по предположению, $u'_y(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow u'_y(x,\varphi(x)) \neq 0$, $x \in I_\delta$, при достаточно малом δ.

Было отмечено выше, что точки $(x,\varphi(x)) \in (D) \setminus (H)$ при $x \in I_\delta$. Значит, точки $(x,\varphi(x))$ — обыкновенные для уравнения (1) при $x \in I_\delta$. Следовательно, система (16) имеет решения, отличные от чисто нулевого. Но это возможно лишь тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi'(x) \\ N(x,\varphi(x)) & -M(x,\varphi(x)) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{для} \quad x \in I_\delta. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $M(x,\varphi(x)) + N(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, $x \in I_\delta$. Последнее означает, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, является решением уравнения (1). ◀

Определение. Пусть функция $u(x,y) \in C^1(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^2$, такая, что $u(x,y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в области (D). Тогда функцию $u(x,y)$ называют *интегралом* уравнения (1) в (D).

Справедливо **утверждение**:

Пусть функция $u(x,y)$ — интеграл уравнения (1) в (D). Пусть $(D) \setminus (H)$ — область единственности для уравнения (1). Тогда на любом решении уравнения (1): $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, график которого лежит в $(D) \setminus (H)$, $u(x,\varphi(x)) \equiv \text{const}$, $x \in \langle a,b \rangle$.

▶ Пусть $y=\tilde{\varphi}(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — произвольное решение уравнения (1), график которого лежит в $(D)\setminus(H)$. У нас $u(x,y)\in C^1(D)$, $\tilde{\varphi}(x)\in C^1(\langle a,b\rangle)\Rightarrow u(x,\tilde{\varphi}(x))\in C^1(\langle a,b\rangle)$. Мы покажем, что $u(x,\tilde{\varphi}(x))\equiv\text{const}$, $x\in\langle a,b\rangle$, если установим, что $\dfrac{d}{dx}u(x,\tilde{\varphi}(x))\equiv 0$, $x\in\langle a,b\rangle$.

Для этого берем произвольную точку $x_0\in\langle a,b\rangle$ и находим $\tilde{\varphi}(x_0)=y_0$. Ясно, что точка $(x_0,y_0)\in(D)\setminus(H)$. Рассмотрим теперь уравнение

$$u(x,y)=u(x_0,y_0).$$

По определению общего интеграла, это уравнение определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию $y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, такую, что $\varphi(x_0)=y_0$, и которая при достаточно малом δ является решением уравнения (1). Ясно, что для $x\in I_\delta$ будет

$$u(x,\varphi(x))\equiv u(x_0,y_0). \tag{18}$$

Имеем:

1) $y=\tilde{\varphi}(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — решение уравнения (1), такое, что $\tilde{\varphi}(x_0)=y_0$;

2) $y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, — решение уравнения (1), такое, что $\varphi(x_0)=y_0$.

Видим, что оба эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $(x_0,y_0)\in(D)\setminus(H)$. Так как $(D)\setminus(H)$ — область единственности уравнения (1), то $\tilde{\varphi}(x)\equiv\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, по крайней мере, при достаточно малом δ. А тогда, в силу (18), $u(x,\tilde{\varphi}(x))\equiv u(x_0,y_0)$, $x\in I_\delta\Rightarrow$, $\dfrac{d}{dx}u(x,\tilde{\varphi}(x))\equiv 0$, $x\in I_\delta$, $\Rightarrow$ в частности, $\dfrac{d}{dx}u(x,\tilde{\varphi}(x))\Big|_{x=x_0}=0$. У нас точка x_0 — любая из $\langle a,b\rangle$ ($\langle a,b\rangle$ — промежуток, на котором определено решение $y=\tilde{\varphi}(x)$ уравнения (1)). Поэтому получаем

$$\frac{d}{dx}u(x,\tilde{\varphi}(x))\equiv 0, x\in\langle a,b\rangle. \blacktriangleleft$$

§7. Уравнения в полных дифференциалах

Пусть имеется уравнение:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

$M(x,y), N(x,y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^2$.

Определение. Уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах* в области (D), если существует функция $u(x,y) \in C^1(D)$ такая, что

$$du(x,y) \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy, \quad (x,y) \in (D).$$

Функцию $u(x,y)$ называют в этом случае *первообразной* по отношению к левой части уравнения (1) в (D).

Рассмотрим уравнение: $xdx + ydy = 0$. Здесь $M(x,y) \equiv x$; $N(x,y) \equiv y$; $M(x,y), N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$. Рассмотрим функцию $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $u(x,y) \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Имеем $du(x,y) \equiv xdx + ydy$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Следовательно, данное уравнение — уравнение в полных дифференциалах в $\mathbf{R}^2$; $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ — первообразная для $xdx + ydy$ в $\mathbf{R}^2$.

Заметим, что если функция $u(x,y)$ является первообразной для левой части уравнения (1), то любая первообразная для левой части уравнения (1) содержится во множестве $\{u(x,y) + \tilde{C}\}$, где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная.

▶ В самом деле, пусть функция $u(x,y)$ — первообразная для левой части уравнения (1) в (D), а $\tilde{u}(x,y)$ — любая другая первообразная для левой части уравнения (1) в области (D). Тогда мы должны иметь $du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ и $d\tilde{u}(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Следовательно, $d\left(\tilde{u}(x,y) - u(x,y)\right) \equiv 0$ в (D). Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по обеим независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная величина, т. е. $\tilde{u}(x,y) - u(x,y) \equiv \tilde{C}$ в (D) $\Rightarrow$ $\tilde{u}(x,y) = u(x,y) + \tilde{C}$ в (D). ◀

Свойства уравнения в полных дифференциалах

Первое свойство. Пусть (1) — уравнение в полных дифференциалах в области (D). Пусть функция $u(x,y)$ — первообразная его левой части в (D). Тогда: соотношение $u(x,y)=C$ является общим интегралом уравнения (1) в области (D).

▶ Проверим, что соотношение $u(x,y)=C$ удовлетворяет критерию общего интеграла уравнения (1) в (D).

1. У нас по условию:

$$du(x,y) \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy, \quad (x,y)\in(D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy, \quad (x,y)\in(D),$$

при любых dx и dy. Положим $(dx,dy)=(1,0)$; получим $u'_x(x,y)=M(x,y)$. Положим $(dx,dy)=(0,1)$; получим $u'_y(x,y)=N(x,y)$. Так как в (1) $M(x,y), N(x,y)\in C(D)$, то заключаем, что $u'_x(x,y), u'_y(x,y)\in C(D) \Rightarrow u(x,y)\in C^1(D)$. Имеем далее $\left(u'_x(x,y)\right)^2+\left(u'_y(x,y)\right)^2 = M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$ в $(D)\setminus(H)$ (по определению множества $(D)\setminus(H)$). Имеем, наконец,

2. $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ M & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M(x,y) & N(x,y) \\ M(x,y) & N(x,y) \end{vmatrix} \equiv 0$ в (D).

Видим, что выполнены все условия теоремы (см. критерий общего интеграла). Значит, соотношение $u(x,y)=C$ является общим интегралом уравнения (1) в области (D). ◀

Второе свойство. $(D)\setminus(H)$ — область единственности уравнения (1) (из того, что (1) — уравнение в полных дифференциалах в (D), следует, что $(D)\setminus(H)$ — область единственности этого уравнения).

▶ Возьмем любую точку $(x_0,y_0)\in(D)\setminus(H)$. Покажем, что любое решение уравнения (1) с начальными данными (x_0,y_0) представляет собой в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0) неявную функцию, определяемую уравнением:

$$u(x,y)=u(x_0,y_0). \tag{2}$$

В самом деле, пусть функция

$$y=\varphi(x), \quad x\in I_\delta=(x_0-\delta, x_0+\delta), \tag{3}$$

есть решение уравнения (1) с начальными данными (x_0,y_0), т. е. $\varphi(x_0)=y_0$. Тогда, в частности, справедливо тождество:

$$M\left(x,\varphi(x)\right)dx + N\left(x,\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)dx \equiv 0, \quad x\in I_\delta,$$

а значит, справедливо тождество:

$$du(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Последнее означает, что

$$u(x, \varphi(x)) \equiv C(\text{const}), \quad x \in I_\delta. \tag{4}$$

Положим в (4) $x = x_0$. Получим $C = u(x_0, y_0)$. А тогда тождество (4) означает, что функция (3): $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, есть неявная функция, определяемая уравнением (2): $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, рассматриваемым в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Покажем теперь, что уравнение (2), рассматриваемое в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), определяет единственную (с точностью до взаимнообратной) неявную функцию. Для этого перепишем уравнение (2) в виде:

$$\underbrace{u(x, y) - u(x_0, y_0)}_{=F(x,y)\ -\ \text{обозначение}} = 0.$$

Имеем: 1) $F(x, y) \in C^1(D)$; 2) $F(x_0, y_0) = 0$; 3) $F'_y(x, y) = u'_y(x, y) = N(x, y)$; $F'_x(x, y) = u'_x(x, y) = M(x, y)$. Следовательно,

$$[F'_x(x_0, y_0)]^2 + [F'_y(x_0, y_0)]^2 = [M(x_0, y_0)]^2 + [N(x_0, y_0)]^2 \neq 0.$$

Видим, что выполнены все условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$. Из этого следует, что уравнение (2) определяет единственную непрерывно дифференцируемую неявную функцию. ◀

Определение. Область $(D) \subset \mathbf{R}^2$ называется *односвязной*, если любой замкнутый самонепересекающийся контур (γ), целиком лежащий в (D), гомотопен точке, причем гомотопия не выводит контур (γ) из области (D).

Теорема. Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области $(D) \subset \mathbf{R}^2$ и имеют там непрерывные частные производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{5}$$

▶ *Необходимость.* Дано: (1) — уравнение в полных дифференциалах. Требуется доказать, что $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x,y) \in (D)$.

По условию, (1) — уравнение в полных дифференциалах. Но тогда существует функция $u(x,y) \in C^1(D)$ такая, что

$$\begin{aligned} du(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy \equiv \\ &\equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy, \quad (x,y) \in (D). \end{aligned} \tag{6}$$

Подчеркнем, что (6) должно иметь место при любых значениях dx и dy. Положив в (6) $dx = 0$, а $dy \neq 0$, получаем

$$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{7}$$

Положив в (6) $dy = 0$, а $dx \neq 0$, получаем

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{8}$$

Дифференцируя обе части (7) по x, а обе части (8) по y, находим:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in C(D); \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D),$$

ибо, по условию, $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$. Но тогда, как известно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в (D), а значит, $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x,y) \in (D)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x,y) \in (D)$. Требуется доказать, что (1) — уравнение в полных дифференциалах.

I. Обсудим сначала случай, когда область (D) — прямоугольник: $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ c < y < d. \end{cases}$ Рассмотрим функцию $u(x,y)$, определяемую равенством:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy, \tag{9}$$

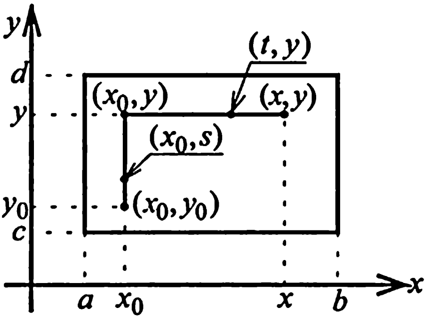

Рис. 1.12. К доказательству теоремы в случае прямоугольной области

где точка (x_0, y_0) — произвольно выбранная в (D). Покажем, что функция $u(x,y)$ определена в (D) и имеет там непрерывные частные производные $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$. Для этого возьмем произвольную точку (x,y) и закрепим ее. Тогда $M(t,y)$, как функция от t при закрепленном y, будет определена и непрерывна на промежутке $[x_0, x]$, а функция $N(x_0, s)$, как функция от s, будет определена и непрерывна на промежутке $[y_0, y]$. Следовательно, функция $u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds$ определена в точке (x,y). У нас точка (x,y) — любая из (D). Значит, $u(x,y)$ определена в области (D). Покажем теперь, что $u(x,y)$ имеет в (D) непрерывные частные производные $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$. Рассмотрим функцию $J = \int\limits_{x_0}^{x} M(t,y)dt$. При любом закрепленном y из (c,d) $M(t,y)$ — функция, непрерывная на (a,b). Следовательно, $J = \int\limits_{x_0}^{x} M(t,y)dt$ — интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. А тогда по теореме Барроу существует J'_x для любого x из (a,b), причем $J'_x = M(x,y)$. Последнее означает, что всюду в (D) существует $u'_x(x,y)$, причем $u'_x(x,y) = M(x,y)$. Так как $M(x,y) \in C(D)$ (по условию), то $u'_x(x,y) \in C(D)$.

Возьмем теперь любое x из (a,b). Тогда для любого y из (c,d) функция $M(t,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике: $[x_0, x] \times [y-\delta, y+\delta]$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, и имеет в этом прямоугольнике непрерывную частную производную $\dfrac{\partial M(t,y)}{\partial y}$. Видим, что в прямоугольнике $[x_0, x] \times [y-\delta, y+\delta]$ выполнены условия теоремы о дифференцировании по параметру под знаком интеграла $J = \int\limits_{x_0}^{x} M(t,y)dt$ (y — параметр). По этой теореме J'_y существует, причем $J'_y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt$. У нас по условию $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D), а значит, и в прямоугольнике $[x_0, x] \times [y-\delta, y+\delta]$. Следовательно, будем иметь

$$J'_y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt = N(t,y)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = N(x,y) - N(x_0,y).$$

Так как $\left(\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds \right)'_y = N(x_0,y)$ для любого y из (c,d), то приходим к выводу, что $u'_y(x,y)$ существует для любой точки $(x,y) \in (D)$, причем $u'_y(x,y) = N(x,y)$, $(x,y) \in (D)$ Так как $N(x,y) \in C(D)$ (по условию), то $u'_y(x,y) \in C(D)$. Итак, получили, что функция $u(x,y)$, определяемая равенством (9), определена в (D); $u(x,y) \in C^1(D)$ и что $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$. Значит,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dy = du(x,y), (x,y) \in (D),$$

т. е. $du(x,y)$ — дифференциал левой части уравнения (1). Следовательно, (1) — уравнение в полных дифференциалах. Функция $u(x,y)$, определяемая формулой (9), — первообразная для левой части уравнения (1).

Замечание. При доказательстве достаточности указан способ построения функции $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу (см. формулу (9)). Совершенно аналогично для функции $u(x,y)$ может быть получена другая формула, а именно:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy. \qquad (10)$$

При практическом интегрировании дифференциального уравнения в полных дифференциалах следует пользоваться как свободой выбора формулы для $u(x,y)$, так и свободой выбора точки (x_0,y_0) в (D). Удачный выбор точки $(x_0,y_0)\in(D)$ и формулы для $u(x,y)$ нередко упрощает вычисление интегралов.

II. Рассмотрим теперь случай, когда (D) — произвольная односвязная область.

Пусть (x_0,y_0) и (x,y) — две произвольно выбранные точки в (D). Пусть кривая $\smile AB$ — кусочно-гладкая, соединяющая точки A и B и лежащая целиком в области (D). Введем в рассмотрение криволинейный интеграл второго рода:

$$\int\limits_{\smile AB} M(x,y)dx+N(x,y)dy. \tag{11}$$

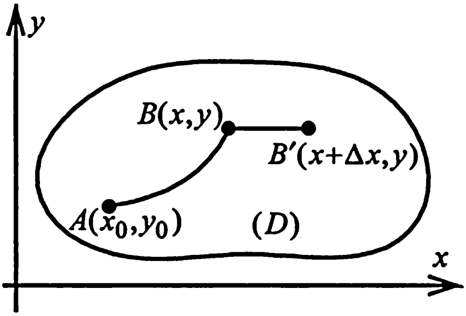

Рис. 1.13. К доказательству теоремы в случае произвольной области

Условие $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в (D) (при прочих условиях теоремы) является необходимым и достаточным для того, чтобы интеграл (11) не зависел от формы пути интегрирования $\smile AB$, а зависел лишь от координат точек A и B. Если это условие выполнено, и мы закрепим точку $A(x_0,y_0)$, а точку $B(x,y)$ будем считать переменной, то интеграл (11) будет функцией от переменных x и y, т. е. функцией точки B в области (D):

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx+N(x,y)dy=u(x,y). \tag{12}$$

Исследуем свойства этой функции.

Закрепим y и дадим x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x\neq 0$ и прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x,y) и $(x+\Delta x,y)$, лежит в (D). Мы получим

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Mdx+Ndy-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx+Ndy.$$

Ввиду независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования мы можем считать, что путь интегрирования в первом интеграле состоит из кривой $\smile AB$, соединяющей точки A и B (той же самой, что и для второго интеграла), и отрезка прямой BB', параллельного оси Ox. Тогда интеграл по $\smile AB$ сократится, и останется:

$$u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} Mdx + Ndy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} M(x, y)\, dx,$$

ибо на прямой BB' y не меняется, и $dy = 0$. Применяя теорему о среднем, находим:

$$u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = M(x+\theta\Delta x, y)\Delta x (0 < \theta < 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = M(x+\theta\Delta x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} M(x+\theta\Delta x, y) = M(x, y).$$

Итак, получили $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$. Так как $M(x, y) \in C(D)$ и точка (x, y) — любая из (D), то заключаем, что $u'_x(x, y) \in C(D)$. Точно так же мы можем убедиться в том, что $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$ и что $u'_y(x, y) \in C(D)$. Следовательно, $u(x, y) \in C^1(D)$ и

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = du(x, y).$$

Таким образом, оказывается, что при выполнении условия $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ в (D) левая часть уравнения (1): $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, определяемой по формуле (11). ◀

Замечание. Самое общее выражение функции $u_1(x,y)$, от которой полный дифференциал равен $M(x,y)dx+N(x,y)dy$, дается формулой

$$u_1(x,y)=u(x,y)+C, \tag{13}$$

где C — произвольная постоянная. В самом деле, мы должны иметь

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy;$$
$$du_1(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

откуда $d(u_1(x,y)-u(x,y))\equiv 0$ в (D). Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по обеим независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная, т. е. $u_1(x,y)-u(x,y)\equiv C$.

Итак, необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u_1(x,y)$ в односвязной области (D), заключается в том, чтобы в (D) имело место тождество

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

при выполнении которого функция $u_1(x,y)$ определяется по формуле

$$u_1(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx+N(x,y)dy. \tag{14}$$

(Предполагается, что функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ непрерывны в (D) и имеют там непрерывные частные производные $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$.)

Пример 1. Уравнение с разделенными переменными.

Так называются уравнения вида:

$$f(x)dx+g(y)dy=0. \tag{15}$$

(В (15) коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy зависит только от y.) Предполагается, что $f(x)\in C((a,b))$; $g(y)\in C((c,d)) \Rightarrow f(x), g(y)\in C(D)$, где $(D)=(a,b)\times(c,d)$.

▶ Имеем $M(x,y)=f(x)$; $N(x,y)=g(y) \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv 0$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$ в $(D) \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в (D). Ясно, что (15) является уравнением в полных дифференциалах в (D). Общим интегралом уравнения (15) в (D) будет $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} g(y)dy = C$, (x_0, y_0) — любая точка из (D). ◀

Пример 2. Решить уравнение $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$.

▶ В этом примере $(D) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $M(x,y) = \frac{y}{x}$; $N(x,y) = y^3 + \ln x$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются в нуль одновременно лишь в точке $(1,0)$. Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D). ($M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$). Значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D). $(D) \setminus \{(1,0)\}$ — область единственности уравнения.

Возьмем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. По формуле (9) находим

$$u(x,y) = \int\limits_{1}^{x} \frac{y}{x}dx + \int\limits_{1}^{y} y^3 dy = y\ln x\Big|_{x=1}^{x=x} + \frac{y^4}{4}\Bigg|_{y=1}^{y=y} = y\ln x + \frac{y^4}{4} - \frac{1}{4}.$$

Это — первообразная для левой части заданного уравнения в области (D). А тогда $u(x,y) + \tilde{C}$ (в частности, $u(x,y) + \frac{1}{4} = y\ln x + \frac{y^4}{4}$) — тоже первообразная для левой части исходного уравнения в (D) и, следовательно, $y\ln x + \frac{y^4}{4} = C$ — общий интеграл данного уравнения в (D). ◀

Пример 3. Решить уравнение $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.

▶ Перепишем заданное уравнение в виде

$$3x^2(1 + \ln y)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0.$$

В этом примере $(D)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ 0<y<+\infty;\end{cases}$ $M(x,y)=3x^2(1+\ln y)$; $N(x,y)=\dfrac{x^3}{y}-2y$; $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{e^2}},\ \dfrac{1}{e}\right)$. Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{3x^2}{y}$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{y}\Rightarrow$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в (D); $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(D)$. Значит, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D). $(D)\setminus\left\{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{e^2}},\ \dfrac{1}{e}\right)\right\}$ — область единственности уравнения.

Возьмем $x_0=0$, $y_0=1$. Точка $(x_0,y_0)=(0,1)\in(D)$. По формуле (10) находим

$$u(x,y)=\int_0^x 3x^2dx+\int_1^y\left(\frac{x^3}{y}-2y\right)dy=x^3\Big|_{x=0}^{x=x}+(x^3\ln y-y^2)\Big|_{y=1}^{y=y}=$$

$$=x^3+x^3\ln y-y^2+1.$$

Это — первообразная для левой части заданного уравнения. А тогда $u(x,y)+C$, в частности, $u(x,y)-1=x^3+x^3\ln y-y^2$, — тоже первообразная для левой части заданного уравнения в (D) и, следовательно, $x^3+x^3\ln y-y^2=C$ — общий интеграл уравнения. ◀

Пример 4. Решить уравнение $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$.

▶ Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{-2\sin^2 y}dy=0.$$

Это уравнение определено в областях $(D_k)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ k\pi<y<(k+1)\pi,\end{cases}$

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$; $M(x,y)=\dfrac{x}{\sin y}+2$; $N(x,y)=-\dfrac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y}$.

$M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $\left((-1)^{k+1}\cdot 2, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (это — особые точки уравнения). В каждой из областей (D_k) имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

в (D_k), $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$$M(x,y), \quad N(x,y), \quad \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D_k), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

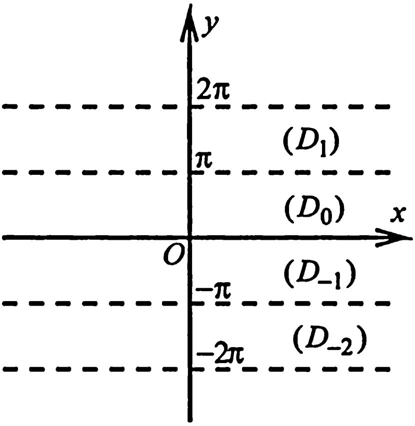

Рис. 1.14. К примеру 3

Значит, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в каждой горизонтальной полосе (D_k), $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В (D_k) возьмем точку $(x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) = \left(0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. По формуле (9) находим

$$u(x,y) = \int_0^x \left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx - \int_{(2k+1)\frac{\pi}{2}}^{y} \frac{\cos y}{2\sin^2 y}dy =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2\sin y} + 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin y}\Bigg|_{y=(2k+1)\frac{\pi}{2}}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y} + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+1}{2\sin y} + 2x = C$ — общий интеграл заданного уравнения в каждой из полос

$$(D_k) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ k\pi < y < (k+1)\pi, \end{cases} k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots . ◀$$

Пример 5. Решить уравнение $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$.

▶ Данное уравнение определено в области $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ y < x^2. \end{cases}$

Имеем $M(x,y) = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)$, $N(x,y) = -\sqrt{x^2-y}$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0) \notin (D)$. Всюду в (D): $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$;

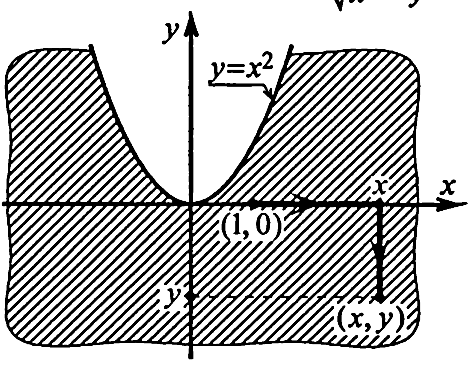

Рис. 1.15. К примеру 4

$M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$. Значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. В (D) возьмем точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$ и любую другую точку (x, y) ($x > 0$). Будем иметь

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}\,dy =$$

$$= \int_1^x 2x(1+x)\,dx - \int_{y=0}^{y=y} \sqrt{x^2-y}\,dy = \left(x^2 + \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{x=1}^{x=x} + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}\Bigg|_{y=0}^{y=y} =$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 = x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} - \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в (D). ◀

§8. Интегрирующий множитель

Пусть дифференциальное уравнение дано в симметричной форме:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

$M(x,y), N(x,y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$. Пусть (1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Если существует функция $\mu(x,y) \in C(D)$ и $\mu(x,y) \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1) получается уравнение

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

в полных дифференциалах в области (D), то функция $\mu(x,y)$ называется ***интегрирующим множителем*** для уравнения (1).

Пусть функция $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1) и пусть функция $u(x,y) \in C^1(D)$ — первообразная левой части уравнения (2). Так как уравнение (2) равносильно уравнению (1), то справедливы следующие утверждения:

1) соотношение $u(x,y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D);

2) множество $(D) \setminus (H)$ — множество точек единственности для уравнения (1).

Рассмотрим вопрос о нахождении интегрирующего множителя. Пусть $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области (D). Пусть $\mu(x,y) \in C^1(D)$. При этих условиях было показано:

Для того, чтобы (2) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) выполнялось тождество:

$$\frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x} \Leftrightarrow M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Иначе: Для того, чтобы уравнение (1) имело в (D) интегрирующий множитель $\mu(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(x,y)$ была решением уравнения:

$$N(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \cdot \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right). \tag{3}$$

(Можно показать, что если $M(x,y), N(x,y) \in C^1(D)$, то для любой точки $(x_0,y_0) \in (D)\setminus(H)$ существует окрестность $U(x_0,y_0)$ такая, что уравнение (3) имеет решение $\mu(x,y) \in C^1\left(U(x_0,y_0)\right)$ и, следовательно, уравнение (1) имеет в $U(x_0,y_0)$ интегрирующий множитель.)

Отметим, что в общем случае задача по нахождению интегрирующего множителя $\mu(x,y)$, как решения уравнения в частных производных (3), не легче, чем задача интегрирования исходного уравнения (1). Рассмотрим некоторые частные случаи, когда уравнение (3) упрощается и интегрирующий множитель для уравнения (1) найти легко.

I. Допустим, что μ зависит от x и y посредством известной функции $\omega(x,y)$, т. е. $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x,y)$ — известная функция. В этом случае будем иметь

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Поэтому уравнение (3) запишется так:

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

или

$$\frac{d}{d\omega}\left(\ln|\mu|\right) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}. \qquad (4)$$

Итак, если μ зависит только от ω, то уравнением для определения μ является уравнение (4). При этом правая часть (4) должна также зависеть только от ω. Этот вывод обратим. В самом деле, пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{обозначение}}}{\psi(\omega)}$$

(т. е. отношение $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}$ есть функция только от ω). Тогда (4) примет вид

$$\frac{d}{d\omega}(\ln|\mu|) = \psi(\omega) \Rightarrow \ln|\mu| = \int \psi(\omega)\,d\omega + \ln C, \text{ где } C > 0;$$

$$\Rightarrow |\mu| = Ce^{\int \psi(\omega)\,d\omega}.$$

Соотношение $|\mu| = Ce^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$ представляет собой бесконечное множество решений уравнения (4). Для приведения уравнения (1) к уравнению в полных дифференциалах в качестве интегрирующего множителя μ достаточно брать лишь какое-нибудь одно из решений уравнения (4). Так мы и будем поступать всюду в дальнейшем.

Замечание. Из проведенных выше рассуждений вытекает, в частности, что:

1. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель μ, зависящий только от x ($\omega = x$), если выполнено условие $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$. Тогда $|\mu| = Ce^{\int \psi(x)\,dx}$.

2. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель μ, зависящий только от y ($\omega = y$), если выполнено условие $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \psi(y)$. Тогда $|\mu| = Ce^{\int \psi(y)\,dy}$.

3. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x \cdot y)$ ($\omega = x \cdot y$), если выполнено условие $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \psi(x \cdot y)$. Тогда $|\mu| = Ce^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$, где $\omega = x \cdot y$.

4. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x + y)$ ($\omega = x + y$), если выполнено условие $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \psi(x + y)$. Тогда $|\mu| = Ce^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$, где $\omega = x + y$;

и т. д.

II. Пусть $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1) и пусть $u(x,y)$ — соответствующий ему интеграл этого уравнения. Тогда все интегрирующие множители уравнения (1) выражаются формулой $\tilde{\mu}(x,y)=\mu(x,y)\cdot\varphi\left(u(x,y)\right)$, где $\varphi(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Действительно, так как $\mu(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1), то $\mu M dx+\mu N dy=0$ — уравнение в полных дифференциалах и, следовательно, $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ в (D) и $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\mu M$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\mu N$. Умножим обе части уравнения (1) на функцию $\tilde{\mu}(x,y)$. Получим $\underbrace{\varphi(t)\cdot\mu M}_{\tilde{M}}dx+\underbrace{\varphi(t)\cdot\mu N}_{\tilde{N}}dy=0$ (здесь $t=u(x,y)$). Рассмотрим разность $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$. Имеем

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\varphi(t)\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}+\mu M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi(t)\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}-\mu N\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$$

$$=\varphi(t)\underbrace{\left(\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right)}_{\equiv 0\text{ в }(D)}+\varphi'(t)\left(\mu M\frac{\partial u}{\partial y}-\mu N\frac{\partial u}{\partial x}\right)=$$

$$=\varphi'(t)\underbrace{\left(\mu^2 MN-\mu^2 MN\right)}_{\equiv 0\text{ в }(D)}\equiv 0\ \text{ в } (D)\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\mu}(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1).

Принимая во внимание изложенное выше, интегрирующий множитель уравнения (1) иногда удается найти следующим образом. Представим уравнение (1) в виде

$$M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy+M_2(x,y)dx+N_2(x,y)dy=0$$

и предположим, что удалось найти интегрирующие множители $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ и интегралы $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ соответственно уравнений

$$M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy=0 \ \text{ и } \ M_2(x,y)dx+N_2(x,y)dy=0.$$

Тогда все интегрирующие множители первого из этих уравнений запишутся в виде $\tilde{\mu}_1(x,y)=\mu_1(x,y)\varphi_1(u_1(x,y))$, а второго — в виде $\tilde{\mu}_2(x,y)=\mu_2(x,y)\varphi_2(u_2(x,y))$, где φ_1 и φ_2 — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Если удается подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, что

$$\mu_1(x,y)\tilde{\varphi}_1(u_1(x,y))=\mu_2(x,y)\tilde{\varphi}_2(u_2(x,y)),$$

то $\tilde{\mu}(x,y)=\mu_1(x,y)\tilde{\varphi}_1(u_1(x,y))$ — интегрирующий множитель уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=x^2+y^2+x$; $N(x,y)=y \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках: $(0,0)$; $(-1,0)$. Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=0 \Rightarrow$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=2y$.

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)d\omega}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{2yd\omega}{y\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-(x^2+y^2+x)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Положим $\omega=x$. Тогда $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=1$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y}{y}dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=2dx \Rightarrow \ln|\mu|=2x+\ln C \Rightarrow |\mu|=e^{2x}C.$$

Возьмем, например, $\mu=e^{2x}$ ($\neq 0$). Умножаем обе части исходного уравнения на $\mu=e^{2x}$. Получаем уравнение $\underbrace{(x^2+y^2+x)\cdot e^{2x}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{y\cdot e^{2x}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0$, равносильное исходному. Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=2ye^{2x}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=2ye^{2x} \Rightarrow \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в $(D)=(\mathrm{R}^2) \Rightarrow$ Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D). $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0); (-1,0)\}$ — множество точек единственности полученного и исходного уравнений.

Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$u(x,y) = \int_1^x \tilde{M}(x,y_0)dx + \int_0^y \tilde{N}(x,y)dy = \int_1^x (x^2+x)e^{2x}dx + \int_0^y ye^{2x}dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2}e^{2x}\Bigg|_{x=1}^{x=x} - \int_1^x xe^{2x}dx + \int_1^x xe^{2x}dx + \frac{y^2}{2}e^{2x}\Bigg|_{y=0}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2}e^{2x} - \frac{e^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2}e^{2x} = \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x^2+y^2)e^{2x} = C$ — общий интеграл исходного уравнения. ◀

Пример 2. Решить уравнение $(x^2+y^2+y)dx - xdy = 0$.

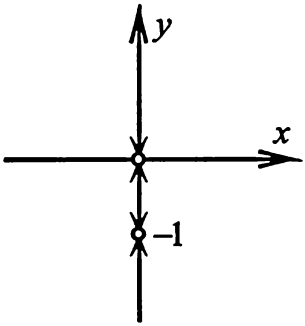

Рис. 1.16.
К примеру 2

▶ Здесь $M(x,y) = x^2+y^2+y$; $N(x,y) = -x \Rightarrow M(x,y), N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$ и $(0,-1)$. Заметим, что

$$\begin{cases} x=0, \\ 0<y<+\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ -1<y<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ -\infty<y<-1 \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Станем рассматривать наше уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -\infty<y<+\infty \end{cases} \text{ и } (D_2) = \begin{cases} -\infty<x<0, \\ -\infty<y<+\infty. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y+1; \ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y+1) \ \left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)\right);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{2(y+1)}{-x\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2+y^2+y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Положим $\omega = x^2 + y^2$. Тогда $\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 2y$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2(y+1)}{-2x^2 - 2y(x^2 + y^2 + y)} d\omega =$$

$$= -\frac{2(y+1)}{2(y+1)(x^2+y^2)} d\omega = -\frac{1}{x^2+y^2} d\omega = -\frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{d\omega}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \ln|\mu| = -\ln|\omega| + \ln C.$$

Возьмем, например, $\mu = \dfrac{1}{\omega}$, т. е. $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ($\mu(x,y)$ определена и не равна нулю в $(D_1) \cup (D_2)$). Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Получим

$$\underbrace{\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем:

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y} = \frac{(2y+1)(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ как в левой, так и в правой открытых полуплоскостях (т. е. в $(D_1) \cup (D_2)$). Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в этих полуплоскостях.

1) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$u(x,y) = \int_1^x \tilde{M}(x, y_0)\,dx + \int_0^y \tilde{N}(x,y)\,dy =$$

$$= \int_1^x dx - \int_0^y \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = x\Big|_{x=1}^{x=x} - x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Bigg|_{y=0}^{y=y}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x - 1 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$ — общий интеграл уравнения в правой полуплоскости.

2) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(-1, 0)$.

$$u(x,y) = \int_{-1}^{x} \tilde{M}(x, y_0)dx + \int_{0}^{y} \tilde{N}(x,y)dy =$$

$$= \int_{-1}^{x} dx - \int_{0}^{y} \frac{xdy}{x^2 + y^2} = x + 1 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$ — общий интеграл уравнения в левой полуплоскости. ◀

Пример 3. Решить уравнение $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}$.

▶ Так как $\sqrt{1 + y^2} \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{ydy}{\sqrt{1 + y^2}} = xdy + ydx \Rightarrow \underbrace{y}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(x - \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Здесь $\tilde{M}(x,y) = y$; $\tilde{N}(x,y) = x - \dfrac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$; $\tilde{M}(x,y), \tilde{N}(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$.

$\tilde{M}(x,y)$ и $\tilde{N}(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — множество точек единственности исходного уравнения. Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 1$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ всюду в $\mathbf{R}^2$.

Функция $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ оказалась интегрирующим множителем исходного уравнения. Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(0, 1)$.

$$u(x,y)=\int_0^x M(x,y)dx+\int_1^y N(x_0,y)dy=$$

$$=\int_0^x ydx-\int_1^y \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=xy\Big|_{x=0}^{x=x}-\sqrt{1+y^2}\Big|_{y=1}^{y=y}=$$

$$=xy-\sqrt{1+y^2}+\sqrt{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ xy-\sqrt{1+y^2}=C$ — общий интеграл уравнения. ◀

Пример 4. Решить уравнение

$$xy^2(xy'+y)=1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2y^2}_{=N(x,y)}dy+\underbrace{(xy^3-1)}_{=M(x,y)}dx=0.$$

▶ Здесь $M(x,y)=xy^3-1$; $N(x,y)=x^2y^2$; $M(x,y),N(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке плоскости x, y.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2;\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=xy^2\ \ (\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial x}\in C(\mathbf{R}^2);$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)d\omega}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{xy^2d\omega}{x^2y^2\frac{\partial\omega}{\partial x}-(xy^3-1)\frac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Положим $\omega=x$. Тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=1;\ \ \frac{\partial\omega}{\partial y}=0;\ \ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{xy^2}{x^2y^2}dx\Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{x}\ \text{ для } x\neq 0$$

$$\Rightarrow\ \ln|\mu|=\ln|x|+\ln C\Rightarrow\ |\mu|=C|x|.$$

Возьмем, например, $\mu=x$. Заметим, что исходное уравнение имеет решение $\begin{cases}x=0,\\-\infty<y<+\infty.\end{cases}$ Для $x\neq 0$ и для любых y, т. е. в левой и правой полуплоскостях, μ определена и $\mu\neq 0$. Поэтому, умножив обе части заданного уравнения на $\mu=x$, мы получим в каждой из полуплоскостей уравнение, равносильное исходному:

$$\underbrace{(x^2y^3 - x)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{x^3y^2}_{\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 3x^2y^2$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 3x^2y^2$ $\Rightarrow$ полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в обеих полуплоскостях.

1) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$u(x,y) = \int_1^x M(x,y_0)dx + \int_0^y N(x,y)dy = \int_1^x -xdx + \int_0^y x^3y^2dy =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=1}^{x=x} + \frac{x^3y^3}{3}\bigg|_{y=0}^{y=y} = \frac{x^3y^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{x^3y^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} = C$ — общий интеграл уравнения в правой полуплоскости.

2) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(-1, 0)$.

$$u(x,y) = \int_{-1}^x M(x,y_0)dx + \int_0^y N(x,y)dy =$$

$$= \int_{-1}^x -xdx + \int_0^y x^3y^2dy = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x^3y^3}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{x^3y^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} = C$ — общий интеграл уравнения в левой полуплоскости.

Заметим, что решение исходного уравнения $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ содержится в общем решении. Оно получается из общего при $C = 0$. ◀

Пример 5. Решить уравнение $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$.

▶ Отметим, что функции $M(x,y) = y^2$; $N(x,y) = -xy - x^3$ определены и непрерывны на всей плоскости x, y и обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ — множество точек единственности заданного уравнения. Из вида уравнения следует, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Поэтому искать решения исходного уравнения станем в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\,;\ \frac{\partial N}{\partial x} = -y - 3x^2 \ \Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3(y + x^2)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)\right);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) d\omega}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{3(y + x^2)}{-x(y + x^2)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}\, d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будем иметь $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3(y + x^2)}{-x(y + x^2)}\, dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -3\frac{dx}{x}.$$

В качестве μ возьмем, например, $\mu = \dfrac{1}{x^3}$ (у нас в каждой из областей (D_k), $k = \overline{1,4}$: $x \neq 0$).

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x^3}$. Получим уравнение $\underbrace{\dfrac{y^2}{x^3}}_{\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\left(\dfrac{y}{x^2} + 1\right)}_{\tilde{N}(x,y)} dy = 0$, равносильное исходному в

(D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}(x,y)}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^3}$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}=\dfrac{2y}{x^3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в каждой (D_k), $k=\overline{1,4}$. Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D_k), $k=\overline{1,4}$.

Найдем общий интеграл заданного уравнения в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Для этого возьмем точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$ $(x_0\neq 0;\ y_0\neq 0)$. Будем иметь

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y^2}{x^3}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{y}{x_0^2}+1\right)dy=-\frac{y^2}{2x^2}\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}-\left(\frac{y^2}{2x_0^2}+y\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{y^2}{2x_0^2}-\frac{y^2}{2x_0^2}-y+\frac{y_0^2}{2x_0^2}+y_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=-\left(\frac{y^2}{2x^2}+y\right)+\frac{y_0^2}{2x_0^2}+y_0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{2x^2}+y=C$ — общий интеграл заданного уравнения в каждой из (D_k). Заметим, что решения $\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,\\0<x<+\infty\end{cases}$ содержатся в семействе $\dfrac{y^2}{2x^2}+y=C$ при значении $C=0$. ◀

Пример 6. Решить уравнение $\left(y-\dfrac{1}{x}\right)dx+\dfrac{dy}{y}=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=y-\dfrac{1}{x}$; $N(x,y)=\dfrac{1}{y}$. Видим, что функция $M(x,y)=y-\dfrac{1}{x}$ не определена на линии $\begin{cases}x=0,\\-\infty<y<+\infty,\end{cases}$ а функция $N(x,y)=\dfrac{1}{y}$ не определена на линии $\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<+\infty.\end{cases}$ $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в каждой из областей:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad (D_2)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad (D_4)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\-\infty<y<0.\end{cases}$$

$M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются в нуль ни в одной точке областей (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$ $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(D_k),\ k=\overline{1,4}\right)$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)d\omega}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{1}{\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=\dfrac{y}{x}$, то будем иметь $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x^2}}d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{1}{\dfrac{y}{x}}d\left(\frac{y}{x}\right),$$

т. е.

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{d\omega}{\omega}\Rightarrow \ln|\mu|=-\ln|\omega|+\ln C.$$

В качестве интегрирующего множителя μ возьмем, например, $\mu=-\dfrac{1}{\omega}\Rightarrow \mu=-\dfrac{x}{y}$ (в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$, $x\neq 0$ и $y\neq 0$).

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu=-\dfrac{x}{y}$. Получим $\underbrace{\left(\dfrac{1}{y}-x\right)}_{=\tilde M(x,y)}dx\underbrace{-\dfrac{x}{y^2}}_{=\tilde N(x,y)}dy=0$. $\tilde M(x,y)$ и $\tilde N(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке областей (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}\equiv\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в каждой из областей (D_k).

Найдем общий интеграл заданного уравнения в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0)\in(D_k)$ ($x_0\neq 0$ и $y_0\neq 0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y}-x\right)dx-\int_{y_0}^{y}\frac{x_0}{y^2}dy=$$

$$=\left(\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\frac{x_0}{y}\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}-\frac{x_0}{y}+\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0}{y}-\frac{x_0}{y_0}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}=C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 7. Решить уравнение $(x^2+3\ln y)ydx-xdy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=(x^2+3\ln y)y$ — определена и непрерывна в $(D)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ 0<y<+\infty;\end{cases}$ $N(x,y)=-x$ — определена и непрерывна на $\mathbf{R}^2$ $\Rightarrow$ $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в (D); $M(x,y)$ и $N(x,y)$ одновременно обращаются в нуль лишь в точке $(0,1)$. Из вида заданного уравнения следует, что $\begin{cases}x=0,\\ 1<y<+\infty\end{cases}$ и $\begin{cases}x=0,\\ 0<y<1\end{cases}$ — решения этого уравнения. Поэтому решения нашего уравнения станем искать в областях: $(D_1)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\ y>0\end{cases}$ и $(D_2)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\ y>0.\end{cases}$ Так как $y>0$ в (D), то заданное уравнение равносильно уравнению

$$\underbrace{(x^2+3\ln y)}_{=M_1(x,y)}\,dx\;-\underbrace{\frac{x}{y}}_{=N_1(x,y)}\,dy=0. \qquad (*)$$

Имеем

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{3}{y};\ \frac{\partial N_1}{\partial x}=-\frac{1}{y}\ \Rightarrow\ \frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{4}{y};$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M_1}{\partial y}-\dfrac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M_1\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}\,d\omega=\frac{\dfrac{4}{y}}{-\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-(x^2+3\ln y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}\,d\omega.$$

Если положить $\omega=x$, то будем иметь $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=1$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=0$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{4}{y}}{-\dfrac{x}{y}}\,dx\Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=-4\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln|\mu|=-4\ln|x|+\ln C.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем, например, функцию $\mu=\dfrac{1}{x^4}$. Заметим, что $x\neq 0$ как в (D_1), так и в (D_2). Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\dfrac{1}{x^4}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}+3\frac{\ln y}{x^4}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx-\underbrace{\frac{1}{x^3y}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0,$$

равносильное исходному в $(D_1)\cup(D_2)$. Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{3}{x^4y}$;

$\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\dfrac{3}{x^4y}\Rightarrow\ \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ как в (D_1), так и в (D_2). Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл этого уравнения (а следовательно, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k=1,2$. Для этого возьмем точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$ ($x_0\neq 0$, $y_0>0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x^2}+3\frac{\ln y}{x^4}\right)dx-\int_{y_0}^{y}\frac{1}{x_0^3y}dy=\left(-\frac{1}{x}-\frac{\ln y}{x^3}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}-\frac{\ln y}{x_0^3}\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{\ln y}{x^3}+\frac{1}{x_0}+\frac{\ln y}{x_0^3}-\frac{\ln y}{x_0^3}+\frac{\ln y_0}{x_0^3}=-\frac{1}{x}-\frac{\ln y}{x^3}+\frac{1}{x_0}+\frac{\ln y_0}{x_0^3}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln y}{x^3}=C$ — общий интеграл нашего уравнения в $(D_1)\cup(D_2)$ ◀

Пример 8. Решить уравнение $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=y(y^2+1)$; $N(x,y)=x(y^2-x+1)\Rightarrow M,N\in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$, $(1,0)$. Непосредственно из вида данного уравнения заключаем, что

$$\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=0,\\0<x<1;\end{cases}\quad\begin{cases}y=0,\\1<x<+\infty;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\-\infty<y<0\end{cases}$$

— решения этого уравнения. Поэтому решения исходного уравнения станем искать в областях:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad(D_4)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\-\infty<y<0.\end{cases}$$

Так как $y^2+1\neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\underbrace{y}_{=M_1}dx+\underbrace{\left(x-\frac{x^2}{y^2+1}\right)}_{=N_1}dy=0.\qquad(*)$$

Имеем

$$\frac{\partial M_1}{\partial y}=1;\ \frac{\partial N_1}{\partial x}=1-\frac{2x}{y^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{\partial M_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{2x}{y^2+1};$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M_1}{\partial y}-\dfrac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M_1\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{2x}{y^2+1}}{\left(x-\dfrac{x^2}{y^2+1}\right)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=x\cdot y$, то будем иметь $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=y$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=x$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{2x}{y^2+1}}{\left(x-\dfrac{x^2}{y^2+1}\right)y-xy}d\omega\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{2x}{y^2+1}}{xy-\dfrac{x^2y}{y^2+1}-xy}d\omega\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{\omega}d\omega.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем, например, функцию $\mu=\dfrac{1}{\omega^2}\Rightarrow\ \mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$ (у нас в каждой области (D_k), $k=\overline{1,4}$, $x\neq0$, $y\neq0$).

Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\frac{1}{x^2y}}_{=\tilde M(x,y)}dx+\underbrace{\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y^2(y^2+1)}\right)}_{=\tilde N(x,y)}dy=0,$$

равносильное исходному в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\dfrac{\partial\tilde M}{\partial y}=-\dfrac{1}{x^2y^2}$; $\dfrac{\partial\tilde N}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2y^2}\Rightarrow\ \dfrac{\partial\tilde M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde N}{\partial x}$ в каждой из областей (D_k). Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл этого уравнения (а значит, и исходного уравнения) в каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$). Будем иметь

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2 y} + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{x_0 y^2} - \frac{1}{y^2(1+y^2)} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{xy}\bigg|_{x=x_0}^{x=x} + \left(-\frac{1}{x_0 y} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y \right)\bigg|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x_0 y} - \frac{1}{x_0 y} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y +$$

$$+ \frac{1}{x_0 y_0} - \frac{1}{y_0} - \operatorname{arctg} y_0 = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ -\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y} + \operatorname{arctg} y = C$ — общий интеграл исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 9. Решить уравнение $y^2 dx + (e^x - y)dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = y^2$; $N(x,y) = e^x - y \Rightarrow M(x,y), N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке из $\mathbf{R}^2$. Из самого уравнения легко видеть, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения. Поэтому станем рассматривать наше уравнение для $y \neq 0$, а именно: для $y > 0$ и для $y < 0$ (т. е. в открытых верхней и нижней полуплоскостях). Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - e^x;$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\frac{2y-e^x}{(e^x-y)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=x+\ln|y|$, то будет $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=1$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{1}{y}$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{2y-e^x}{(e^x-y)-y^2\dfrac{1}{y}}d\omega\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-d\omega.$$

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=e^{-\omega}\Rightarrow\mu=e^{-x}\cdot e^{-\ln|y|}\Rightarrow$

$\Rightarrow\mu=\dfrac{1}{|y|e^x}\Rightarrow\mu=\dfrac{1}{ye^x}$, если $y>0$ и $\mu=-\dfrac{1}{ye^x}$, если $y<0$. Умножим обе части исходного уравнения на μ. Получим (как для открытой верхней, так и для открытой нижней полуплоскостей) уравнение

$\underbrace{ye^{-x}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\left(\dfrac{1}{y}-e^{-x}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0$, равносильное исходному. Имеем

$\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=e^{-x}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=e^{-x}\Rightarrow\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ всюду в открытых верхней и нижней полуплоскостях. Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в отмеченных полуплоскостях.

Найдем общие интегралы нашего уравнения в верхней и нижней полуплоскостях. Для этого берем точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$, $k=1,2$ ((D_1) — верхняя, а (D_2) — нижняя полуплоскости; x_0 — любое, а y_0 — любое, не равное нулю).

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=\int_{x_0}^{x}ye^{-x}dx+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y}-e^{-x_0}\right)dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=-ye^{-x}\Big|_{x=x_0}^{x=x}+\left(\ln|y|-e^{-x_0}y\right)\Big|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$= -ye^{-x} + ye^{-x_0} + \ln|y| - ye^{-x_0} - \ln|y_0| + y_0 e^{x_0} = \ln|y| - ye^{-x} + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| - ye^{-x} = C$ — общий интеграл уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$ ◀

Пример 10. Решить уравнение $x^2 y(ydx + xdy) = 2ydx + xdy$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2y^2 - 2y$; $N(x,y) = x^3y - x \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения заданного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2y^2dx + x^3ydy = 0. \qquad (*)$$

Легко видеть, что $\mu_1(x,y) = \dfrac{1}{x^3y^2}$ является интегрирующим множителем этого уравнения в (D_k), $k = \overline{1,4}$. В самом деле, после умножения обеих его частей на μ_1 получаем: $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0$ — уравнение в полных дифференциалах. $xy = C_1$ — общий интеграл уравнения (*) в каждой из областей (D_k), $k = \overline{1,4}$. Тогда все интегрирующие множители уравнения (*) содержатся в формуле $\tilde{\mu}_1(x,y) = \mu_1(x,y) \cdot \varphi_1(x \cdot y) = \dfrac{1}{x^3y^2}\varphi_1(x \cdot y)$, где φ_1 — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция.

2. Рассмотрим уравнение

$$2ydx + xdy = 0. \qquad (**)$$

Легко видеть, что $\mu_2(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ является интегрирующим множителем уравнения (**) в (D_k), $k = \overline{1,4}$, ибо после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2 = \dfrac{1}{xy}$ получаем уравнение в полных дифференциалах: $2\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0 \Rightarrow x^2y = C_2$ — общий интеграл уравнения (**) в каждой из (D_k), $k = \overline{1,4}$. Тогда, как мы знаем, все интегрирующие множители уравнения (**) содержатся в соотношении: $\tilde{\mu}_2(x,y) = \mu_2(x,y)\cdot\varphi_2(x^2y) = \dfrac{1}{xy}\cdot\varphi_2(x^2y)$, где φ_2 — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было

$$\mu_1(x,y)\cdot\tilde{\varphi}_1(xy) = \mu_2(x,y)\cdot\tilde{\varphi}_2(x^2y),$$

т. е. чтобы было $\dfrac{1}{x^3y^2}\tilde{\varphi}_1(xy) = \dfrac{1}{xy}\tilde{\varphi}_2(x^2y)$. Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(xy) \equiv 1$. Тогда $\tilde{\varphi}_2(x^2y) = \dfrac{1}{x^2y}$. Но тогда

$$\tilde{\mu}(x,y) = \mu_1(x,y)\cdot\tilde{\varphi}_1 = \mu_2(x,y)\cdot\tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{x^3y^2}$$

будет интегрирующим множителем исходного уравнения в (D_k), $k = \overline{1,4}$. Проверим это. Умножим обе части исходного уравнения на $\tilde{\mu} = \dfrac{1}{x^3y^2}$. Получим

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3y}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2y^2}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0.$$

Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y} = \dfrac{2}{x^3y^2}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x} = \dfrac{2}{x^3y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в каждой (D_k), $k = \overline{1,4}$.

Найдем общие интегралы исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Для этого возьмем точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$ ($x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3y}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x_0^2y^2}\right)dy=$$

$$=\left(\ln|x|+\frac{1}{x^2y}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(\ln|y|+\frac{1}{x_0^2y}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x^2y}-\ln|x_0|-\frac{1}{x_0^2y}+\ln|y|+\frac{1}{x_0^2y}-\ln|y_0|-\frac{1}{x_0^2y_0}=$$

$$=\ln|x|+\ln|y|+\frac{1}{x^2y}+\tilde{C}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \ln|x|+\ln|y|+\dfrac{1}{x^2y}=C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 11. Решить уравнение $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=xy+y^3$; $N(x,y)=x^2y-x^2\ \Rightarrow\ M,N\in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$ и $(-1,1)$. Видим непосредственно, что

$$\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=0,\\0<x<+\infty;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\-\infty<y<0\end{cases}$$

— решения заданного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad(D_4)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\-\infty<y<0.\end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+3y^2;\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3x+3y^2-2xy;$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{3x+3y^2-2xy}{(x^2y-x^2)\dfrac{\partial \omega}{\partial x}-(xy+y^3)\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=y(x+y)^2$, то будет: $\dfrac{\partial \omega}{\partial x}=2y(x+y)$; $\dfrac{\partial \omega}{\partial y}=(x+y)(x+3y)$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{3x+3y^2-2xy}{(x^2y-x^2)2y(x+y)-y(x+y)(x+y^2)(x+3y)}d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{3x+3y^2-2xy}{-y(x+y)^2(3x+3y^2-2xy)}d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{y(x+y)^2}$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu=\dfrac{1}{y(x+y)^2}$. Заметим, что умножение на μ сводится к делению обеих частей уравнения на произведение $y(x+y)^2$. У нас в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$, $y\neq 0$. В областях (D_1) и (D_3): $x+y\neq 0$. В областях (D_2) и (D_4) $x+y=0$ на прямой $y=-x$. Отметим, что

$$\begin{cases} y=-x, \\ -\infty<x<-1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x, \\ -1<x<0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x, \\ 0<x<+\infty \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Поэтому станем рассматривать исходное уравнение в областях (D_1), (D_{21}), (D_{22}), (D_3), (D_{41}), (D_{42}), где

$$(D_{21})=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ -x<y<+\infty; \end{cases} \quad (D_{22})=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ 0<y<-x; \end{cases}$$

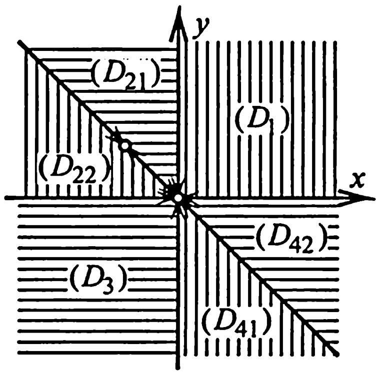

Рис. 1.17. К примеру 11

$$(D_{41}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x; \end{cases}$$

$$(D_{42}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < 0. \end{cases}$$

В каждой из этих областей, после умножения обеих частей исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{y(x+y)^2}$, мы получим уравнение, равносильное исходному. Это будет уравнение

$$\underbrace{\frac{x+y^2}{(x+y)^2}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\frac{x^2(y-1)}{y(x+y)^2}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0.$$

Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \dfrac{2x(y-1)}{(x+y)^3}$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \dfrac{2x(y-1)}{(x+y)^3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в областях (D_1), (D_{21}), (D_{22}), (D_3), (D_{41}), (D_{42}). Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в каждой из упомянутых областей.

Замечание. В этом примере установить вид функции $\omega(x,y)$ из условия, чтобы было $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega)$, оказалось делом не совсем простым. Более удобным способом нахождения интегрирующего множителя μ для этого уравнения будет следующий.

Запишем исходное уравнение в виде

$$y^3dx + x^2ydy + xydx - x^2dy = 0.$$

1. Рассмотрим уравнение

$$y^3dx + x^2ydy = 0. \qquad (*)$$

Легко видеть, что $\mu_1(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^3}$ является интегрирующим множителем этого уравнения. В самом деле, после умножения обеих его частей на μ_1 получаем: $\dfrac{dx}{x^2}+\dfrac{dy}{y^2}=0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-C \Rightarrow \dfrac{x+y}{xy}=C$ — общий интеграл рассматриваемого уравнения в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$, $\Rightarrow \tilde{\mu}_1(x,y)=\varphi_1\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)\mu_1(x,y)$ — интегрирующий множитель уравнения (*). (φ_1 — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция.)

2. Рассмотрим уравнение

$$xydx-x^2dy=0. \qquad (**)$$

Легко видеть, что $\mu_2(x,y)=\dfrac{1}{x^2y}$ является интегрирующим множителем уравнения (**), ибо после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2=\dfrac{1}{x^2y}$ получаем $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dy}{y}=0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow \dfrac{y}{x}=C$ — общий интеграл уравнения (**) в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Значит, $\tilde{\mu}_2(x,y)=\mu_2(x,y)\cdot\varphi_2\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2y}\varphi_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где φ_2 — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, — тоже интегрирующий множитель уравнения (**).

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было:

$$\frac{1}{x^2y^3}\tilde{\varphi}_1\left(\frac{x+y}{xy}\right)\equiv\frac{1}{x^2y}\tilde{\varphi}_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(t)=\dfrac{1}{t^2}$, а в качестве функции $\tilde{\varphi}_2(z)=(1+z)^{-2}$. Тогда $\tilde{\varphi}_1\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)=\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$, $\tilde{\varphi}_2\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x^2}{(x+y)^2}$ и, следовательно,

$$\mu_1\tilde{\varphi}_1\left(\frac{x+y}{xy}\right)\equiv\mu_2\tilde{\varphi}_2\left(\frac{y}{x}\right)\equiv\frac{1}{y(x+y)^2}.$$

Вывод: $\tilde{\mu}(x,y)=\dfrac{1}{y(x+y)^2}$ — интегрирующий множитель для исходного уравнения.

Найдем общие интегралы исходного уравнения в областях: (D_1), (D_{21}), (D_{22}), (D_3), (D_{41}), (D_{42}). Для этого возьмем точку (x_0,y_0) ($x_0\neq0$; $y_0\neq0$; $y_0\neq -x_0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{x+y^2}{(x+y)^2}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{x_0^2(y-1)}{y(x_0+y)^2}dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{(x+y)+(y^2-y)}{(x+y)^2}dx+\int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y}+\frac{x_0(x_0+1)}{(x_0+y)^2}+\frac{1}{x_0+y}\right)dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\left(\ln|x+y|+\frac{y-y^2}{x+y}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}-$$

$$-\left(\ln|y|+\frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y}-\ln|x_0+y|\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\ln|x+y|+\frac{y-y^2}{x+y}-\ln|x_0+y|-$$

$$-\frac{y-y^2}{x_0+y}-\ln|y|-\frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y}+\ln|x_0+y|+$$

$$+\ln|y_0|+\frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y_0}-\ln|x_0+y_0|=$$

$$= \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{y-y^2}{x+y} - \frac{y-y^2+x_0^2+x_0}{x_0+y} + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{y-y^2}{x+y} - 1 - x_0 + y + C_1 =$$

$$= \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{y-y^2+xy+y^2}{x+y} + C_2 = \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{(x+1)y}{x+y} + C_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{(x+1)y}{x+y} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1), (D_{21}), (D_{22}), (D_3), (D_{41}), (D_{42}). ◀

Пример 12. Решить уравнение $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2 - \sin^2 y$; $N(x,y) = x\sin 2y \Rightarrow M(x,y), N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и в точках $\left(-1, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ k\pi < y < (k+1)\pi, \end{cases}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — решения этого уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ и $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ (это открытые правая и левая полуплоскости). Имеем

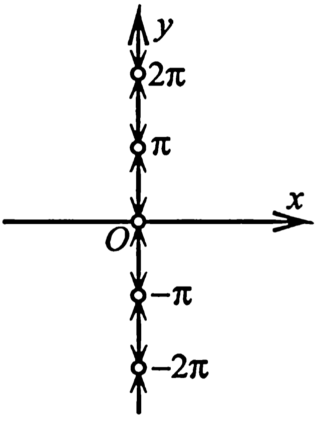

Рис. 1.18. К примеру 12

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin 2y; \ \frac{\partial N}{\partial x} = \sin 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2\sin 2y;$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-(x^2-\sin^2 y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial\omega}{\partial x}=1$; $\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$; $\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}dx$. Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\frac{1}{x^2}$. Умножим обе части исходного уравнения на $\mu=\frac{1}{x^2}$ (у нас в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$: $x\neq 0$). Получим уравнение $\underbrace{\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\frac{\sin 2y}{x}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0$, равносильное исходному в (D_k), $k=\overline{1,2}$. Имеем $\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{x^2}$; $\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=-\frac{\sin 2y}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k=\overline{1,2}$. Найдем общие интегралы полученного (а значит, и исходного) уравнения в областях (D_1), (D_2). Для этого возьмем точку (x_0, y_0) ($x_0\neq 0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\sin 2y}{x_0}dy=\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}-\frac{1}{2x_0}\cos 2y\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=x+\frac{\sin^2 y}{x}-x_0-\frac{\sin^2 y}{x_0}-\frac{1}{2x_0}\cos 2y+\frac{1}{2x_0}\cos 2y_0=$$

$$=x+\frac{\sin^2 y}{x}-\frac{1}{x_0}\left(\sin^2 y+\frac{\cos 2y}{2}\right)+C_1=$$

$$=x+\frac{\sin^2 y}{x}-\frac{1}{2x_0}(2\sin^2 y+\cos^2 y-\sin^2 y)+C_1=x+\frac{\sin^2 y}{x}+\tilde{C}_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x+\dfrac{\sin^2 y}{x}=C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Пример 13. Решить уравнение $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx$.

▶ Перепишем исходное уравнение в виде

$$2ydx-x(\ln y+2\ln x-1)dy=0.$$

Ясно, что должно быть $x>0$ и $y>0$. Здесь $M(x,y)=2y$; $N(x,y)=(1-\ln y-2\ln x)x \Rightarrow \quad M(x,y),N(x,y)\in C(D)$, где $(D)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\ 0<y<+\infty.\end{cases}$ Так как $M(x,y)\neq 0$ в (D), то $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке области (D).

У нас $x\neq 0$ для точек $(x,y)\in(D)$. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\underbrace{2\frac{y}{x}}_{=M_1(x,y)}dx+\underbrace{(1-\ln y-2\ln x)}_{=N_1(x,y)}dy=0. \qquad (*)$$

Имеем $\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$; $\dfrac{\partial N_1}{\partial x}=-\dfrac{2}{x}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial M_1}{\partial y}-\dfrac{\partial N_1}{\partial x}=\dfrac{4}{x}$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M_1}{\partial y}-\dfrac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M_1\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{4}{x}}{(1-\ln y-2\ln x)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-2\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=y$, то будет $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=1$; $\dfrac{d\mu}{\mu}=-\dfrac{2}{y}dy$. Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\dfrac{1}{y^2}$. Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\dfrac{1}{y^2}$ (у нас для точек $(x,y)\in(D)$: $y\neq 0$). Получим уравнение

$$\underbrace{\frac{2}{xy}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\left(\frac{1-\ln y-2\ln x}{y^2}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0,$$

равносильное исходному в (D). Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=-\dfrac{2}{xy^2}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=-\dfrac{2}{xy^2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в области (D). Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в области (D). Для этого возьмем точку $(x_0,y_0)\in(D)$ ($x_0>0$, $y_0>0$). Будем иметь

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{2}{xy}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{1-2\ln x_0}{y^2}-\frac{\ln y}{y^2}\right)dy=$$

$$=\frac{2}{y}\ln x\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(\frac{2\ln x_0-1}{y}+\frac{\ln y+1}{y}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=\frac{2}{y}\ln x-\frac{2}{y}\ln x_0+\frac{2\ln x_0}{y}-\frac{1}{y}+\frac{\ln y}{y}+\frac{1}{y}-\frac{2}{y_0}\ln x_0+\frac{1}{y_0}-\frac{\ln y_0}{y_0}-\frac{1}{y_0}=$$

$$=\frac{2}{y}\ln x+\frac{\ln y}{y}+C_1=\frac{1}{y}(\ln y+2\ln x)+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{y}(\ln y+2\ln x)=\tilde{C}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\ln(yx^2)}{y}=\tilde{C}$ $\Rightarrow$ $y=C\ln(x^2y)$ — общий интеграл исходного уравнения в (D). ◀

Пример 14. Решить уравнение $(x^2+1)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx$.

▶ Так как $x^2+1\neq0$, то исходное уравнение будет равносильно уравнению $2xdx+\cos ydy=\dfrac{2x}{x^2+1}\sin ydx$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\sin y\right)}_{=M(x,y)}dx+\underbrace{\cos y}_{=N(x,y)}\,dy=0. \qquad (*)$$

$M(x,y), N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$; M, N обращаются одновременно в нуль в точках $\left(0,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. Станем рассматривать наше уравнение в области $(D)=(\mathrm{R}^2)\setminus\left\{\left(0,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)\left(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\right.\right\}$.

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{2x}{x^2+1}\cos y;\ \frac{\partial N}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2x}{x^2+1}\cos y;$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\frac{-\dfrac{2x}{x^2+1}\cos y}{\cos y\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-\left(2x-\dfrac{2x}{x^2+1}\sin y\right)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=x$, то будет $\frac{\partial\omega}{\partial x}=1$; $\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$; $\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2x}{x^2+1}dx$.

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\frac{1}{x^2+1}$. Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\frac{1}{x^2+1}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\sin y\right)}_{=\tilde M(x,y)}dx+\underbrace{\frac{\cos y}{x^2+1}}_{=\tilde N(x,y)}\,dy=0,$$

равносильное исходному в области (D). Имеем

$$\frac{\partial\tilde M}{\partial y}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos y;\ \frac{\partial\tilde N}{\partial x}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cos y\ \Rightarrow\ \frac{\partial\tilde M}{\partial y}\equiv\frac{\partial\tilde N}{\partial x}\ \text{в } (D).$$

Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в (D). Для этого берем точку $(x_0, y_0) \in (D)$. Будем иметь

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \sin y \right) dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\cos y}{x_0^2 + 1} dy =$$

$$= \left(\ln (1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} \sin y \right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} + \frac{\sin y}{1+x_0^2}\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= \ln (1+x^2) + \frac{\sin y}{1+x^2} - \ln (1+x_0^2) - \frac{1}{1+x_0^2} \sin y + \frac{1}{1+x_0^2} \sin y - \frac{\sin y_0}{1+x_0^2} =$$

$$= \ln (1+x^2) + \frac{\sin y}{1+x^2} + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln (1+x^2) + \dfrac{\sin y}{1+x^2} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в (D). ◀

Пример 15. Решить уравнение $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = 2x^3y^2 - y$, $N(x,y) = 2x^2y^3 - x \Rightarrow$ $M(x,y), N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ одновременно обращаются в нуль в точках $(0,0)$, $\left(2^{-1/4}, 2^{-1/4}\right)$; $\left(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}\right)$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y-1;\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=4xy^3-1\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4xy(x^2-y^2);$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{4xy(x^2-y^2)}{(2x^2y^3-x)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-(2x^3y^2-y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega=xy$, то будет: $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=y$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=x$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{4xy(x^2-y^2)}{xy(2xy^3-1-2x^3y+1)}d\omega=\frac{4(x^2-y^2)}{2xy(y^2-x^2)}d\omega\Rightarrow\ \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{\omega}d\omega.$$

Возьмем в качестве μ функцию $\mu=\dfrac{1}{\omega^2}\Rightarrow\ \mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$. Умножим обе части исходного уравнения на $\mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$ (у нас $x\neq0$ и $y\neq0$ в (D_k), $k=\overline{1,4}$). Получим уравнение $\underbrace{\left(2x-\dfrac{1}{x^2y}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\left(2y-\dfrac{1}{xy^2}\right)}_{\tilde{N}(x,y)}dy=0$, равносильное исходному в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2y^2}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2y^2}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D_k).

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в (D_k). Для этого берем произвольную точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$, $k=\overline{1,4}$. Имеем

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(2x-\frac{1}{x^2y}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(2y-\frac{1}{x_0y^2}\right)dy=$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{xy}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(y^2+\frac{1}{x_0 y}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=x^2+\frac{1}{xy}-x_0^2-\frac{1}{x_0 y}+y^2+\frac{1}{x_0 y}-y_0^2-\frac{1}{x_0 y_0}=$$

$$=x^2+\frac{1}{xy}+y^2+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x^2+y^2+\dfrac{1}{xy}=C$ — общий интеграл исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 16. Решить уравнение $(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=x^2y^3+y$; $N(x,y)=x^3y^2-x\ \Rightarrow$ $M(x,y),N(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ одновременно обращаются в нуль в точке $(0,0)$. Из заданного уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=0,\\0<x<+\infty;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\0<y<+\infty\end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad(D_4)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\-\infty<y<0.\end{cases}$$

Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}=3x^2y^2+1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=3x^2y^2-1\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=2$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\frac{2}{x(x^2y^2-1)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-y(x^2y^2+1)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = y$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2d\omega}{xy(x^2y^2 - 1 - x^2y^2 - 1)} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu = \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{1}{xy}$. Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{xy}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$). Получим уравнение

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0, \qquad (*)$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k), $k = \overline{1,4}$.

В уравнении (*) $\tilde{M}(x,y) = xy^2 + \dfrac{1}{x}$; $\tilde{N}(x,y) = x^2y - \dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y} = 2xy$;

$\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x} = 2xy$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$. Следовательно, полученное уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах в областях (D_k), $k = \overline{1,4}$.

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного) уравнения в областях (D_k), $k = \overline{1,4}$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k). Будем иметь

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(x_0^2y - \frac{1}{y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{x_0^2y^2}{2} - \ln|y|\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2y^2}{2} + \ln|x| - \frac{x_0^2y^2}{2} - \ln|x_0| + \frac{x_0^2y^2}{2} - \ln|y| - \frac{x_0^2y_0^2}{2} +$$

$$+ \ln|y_0| = \frac{x^2y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2y^2}{2} + \ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = C$ — общий интеграл уравнения в каждой из областей (D_k), $k = \overline{1,4}$. ◀

Пример 17. Решить уравнение $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2 - y$; $N(x,y) = x(y+1) \Rightarrow M, N \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. Из самого уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ ((D_1) и (D_2) — открытые левая и правая полуплоскости). Запишем исходное уравнение в виде

$$x^2dx + xydy + xdy - ydx = 0.$$

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2dx + xydy = 0. \qquad (*)$$

Легко видеть, что функция $\mu_1 = \dfrac{1}{x}$ является интегрирующим множителем для уравнения (*). В самом деле, после умножения обеих частей уравнения (*) на $\mu_1 = \dfrac{1}{x}$ получаем: $xdx + ydy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow x^2 + y^2 = C$ — общий интеграл уравнения (*) в (D_1) и в $(D_2) \Rightarrow$ $\tilde{\mu}_1(x,y) = \mu_1\varphi_1(x^2 + y^2)$ — интегрирующий множитель уравнения

(*) ($\varphi_1(t)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

2. Рассмотрим уравнение

$$xdy - ydx = 0. \qquad (^{**})$$

Легко видеть, что функция $\mu_2 = \dfrac{1}{xy}$ является интегрирующим множителем для уравнения (**). Действительно, после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2 = \dfrac{1}{xy}$ получаем: $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = 0 \Rightarrow$ $\ln|x| - \ln|y| = \ln|C| \Rightarrow \left|\dfrac{x}{y}\right| = |C| \Rightarrow \dfrac{x}{y} = C$ — общий интеграл уравнения (**) в (D_1) и в (D_2) $\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_2(x,y) = \mu_2\varphi_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (**) ($\varphi_2(z)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция). Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было $\mu_1(x,y)\tilde{\varphi}_1(x^2+y^2) \equiv \mu_2(x,y)\tilde{\varphi}_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$, т. е. чтобы было $\dfrac{1}{x}\tilde{\varphi}_1(x^2+y^2) \equiv \dfrac{1}{xy}\tilde{\varphi}_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, а в качестве функции $\tilde{\varphi}_2(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$. Тогда $\tilde{\varphi}_1(x^2+y^2) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\tilde{\varphi}_2\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и, следовательно,

$$\mu_1\tilde{\varphi}_1(x^2+y^2) \equiv \mu_2\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x}{y}\right) \equiv \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}} \text{ в } (D_1) \cup (D_2).$$

Вывод: функция $\tilde{\mu} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ — интегрирующий множитель для исходного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ (у нас $x \neq 0$). Получим уравнение $\underbrace{\dfrac{x^2-y}{x\sqrt{x^2+y^2}}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\dfrac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0$, равносильное в $(D_1) \cup (D_2)$ исходному. Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\dfrac{x(1+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\dfrac{x(1+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в $(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах как в (D_1), так и в (D_2).

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного) уравнения в (D_k), $k = \overline{1,2}$. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = \overline{1,2}$. Имеем

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{x^2-y}{x\sqrt{x^2+y^2}}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{y+1}{\sqrt{x_0^2+y^2}}dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \int_{x_0}^{x} \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{ydy}{\sqrt{x_0^2+y^2}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{x_0^2+y^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,\Big|_{x=x_0}^{x=x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\right|\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} +$$

$$+ \sqrt{x_0^2+y^2}\,\Big|_{y=y_0}^{y=y} + \ln\left|y+\sqrt{x_0^2+y^2}\right|\Big|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2}+y}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x_0^2+y^2}-y}{\sqrt{x_0^2+y^2}+y}\right| +$$

$$+\sqrt{x_0^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\ln\left|\sqrt{x_0^2+y^2}+y\right|-\ln\left|y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|=$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|-\ln\left|\frac{y}{x_0}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x_0^2}}\right|+\ln\left|\frac{y}{x_0}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x_0^2}}\right|+$$

$$+\ln|x_0|-\ln\left|y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|=\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|+C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|=C$ — общий интеграл исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,2}$. ◀

Пример 18. Решить уравнение $y^2(ydx-2xdy)=x^3(xdy-2ydx)$.

▶ Запишем уравнение в виде

$$(y^3+2x^3y)dx-(2y^2x+x^4)dy=0.$$

Здесь $M(x,y)=2x^3y+y^3$, $N(x,y)=-2xy^2-x^4 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$; $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. Непосредственно из уравнения видно, что

$$\begin{cases} y=0, \\ -\infty<x<0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ 0<x<+\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ -\infty<y<0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ 0<y<+\infty \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1)=\begin{cases} 0<x<+\infty, \\ 0<y<+\infty; \end{cases} \quad (D_2)=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ 0<y<+\infty; \end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ -\infty<y<0; \end{cases} \quad (D_4)=\begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -\infty<y<0. \end{cases}$$

1. Рассмотрим уравнение

$$y^2(ydx-2xdy)=0. \qquad (*)$$

Легко видеть, что функция $\mu_1(x,y)=\dfrac{1}{xy^3}$ является интегрирующим множителем для уравнения (*). В самом деле, после умножения обеих частей уравнения (*) на $\mu_1=\dfrac{1}{xy^3}$ получаем $\dfrac{dx}{x}-2\dfrac{dy}{y}=0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow$ $\dfrac{y^2}{x}=C$ — общий интеграл уравнения (*) в (D_k), $k=\overline{1,4}$ $\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_1(x,y)=\mu_1(x,y)\varphi_1\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (*) ($\varphi_1(t)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

2. Рассмотрим уравнение

$$x^3(xdy-2ydx)=0. \qquad (**)$$

Легко видеть, что функция $\mu_2(x,y)=\dfrac{1}{x^4y}$ — интегрирующий множитель для уравнения (**). Действительно, после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2=\dfrac{1}{x^4y}$ получаем $\dfrac{dy}{y}-\dfrac{2dx}{x}=0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{y}=C$ — общий интеграл уравнения (**) в (D_k), $k=\overline{1,4}$ $\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_2(x,y)=\mu_2(x,y)\varphi_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (**) ($\varphi_2(z)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было $\mu_1(x,y)\tilde{\varphi}_1\left(\dfrac{y^2}{x}\right)=\mu_2(x,y)\tilde{\varphi}_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, т. е. чтобы было

$$\frac{1}{xy^3}\tilde{\varphi}_1\left(\frac{y^2}{x}\right)\equiv\frac{1}{x^4y}\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x^2}{y}\right). \qquad (***)$$

Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(t) = t^{\alpha}$, где α — число, пока неизвестное, а в качестве функции $\tilde{\varphi}_2(z) = z^{\beta}$, где β — число, пока неизвестное. Тождество (***) примет тогда вид

$$\frac{1}{xy^3}\cdot\frac{y^{2\alpha}}{x^{\alpha}} \equiv \frac{1}{x^4 y}\cdot\frac{x^{2\beta}}{y^{\beta}} \Rightarrow \frac{x^3}{y^2} \equiv \frac{x^{2\beta+\alpha}}{y^{\beta+2\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta+\alpha = 3, \\ \beta + 2\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}; \beta = \frac{4}{3}.$$

Значит, $\tilde{\varphi}_1(t) = t^{1/3}$; $\tilde{\varphi}_2(z) = z^{4/3}$. Следовательно,

$$\tilde{\mu}(x,y) = \frac{1}{xy^3}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{1/3} \equiv \frac{1}{x^4 y}\left(\frac{x^2}{y}\right)^{4/3} \equiv \frac{1}{x^{4/3}y^{7/3}}$$

(у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$). Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{7}{3}}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(x^{-4/3}y^{2/3} + 2x^{5/3}y^{-4/3}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx - \underbrace{\left(2x^{-1/3}y^{-1/3} + x^{8/3}y^{-7/3}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0.$$

Имеем $\quad \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}}$; $\quad \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{7}{3}} \Rightarrow$

$\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$.

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в (D_k), $k = \overline{1,4}$. Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = \overline{1,4}$. Имеем

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left(x^{-4/3}y^{2/3} + 2x^{5/3}y^{-4/3}\right)dx - \int_{y_0}^{y}\left(2x_0^{-1/3}y^{-1/3} + x_0^{8/3}y^{-7/3}\right)dy =$$

$$= \left(-3x^{-1/3}y^{2/3} + \frac{3}{4}x^{8/3}y^{-4/3}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} - \left(3x_0^{-1/3}y^{2/3} - \frac{3}{4}x_0^{8/3}y^{-4/3}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{x^{8/3}}{y^{4/3}}-3\frac{y^{2/3}}{x^{1/3}}-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_0^{8/3}}{y^{4/3}}+3\frac{y^{2/3}}{x_0^{1/3}}+$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{x_0^{8/3}}{y^{4/3}}-3\frac{y^{2/3}}{x_0^{1/3}}-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_0^{8/3}}{y_0^{4/3}}+3\frac{y_0^{2/3}}{x_0^{1/3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\frac{3}{4}\frac{x^{8/3}}{y^{4/3}}-3\frac{y^{2/3}}{x^{1/3}}+C_1\Rightarrow u(x,y)=3\frac{x^3-4y^2}{4x^{1/3}y^{4/3}}+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3\dfrac{x^3-4y^2}{4x^{1/3}y^{4/3}}=\tilde{C}\Rightarrow x^3-4y^2=Cy\cdot\sqrt[3]{xy}$ — общий интеграл исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 19. Решить уравнение $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=y(x+y)$; $N(x,y)=xy+1\Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=x+2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=y\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(1,-1)$ и $(-1,1)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что $y=0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях $(D_1)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\0<y<+\infty;\end{cases}$ $(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\-\infty<y<0.\end{cases}$ Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=x+y$;

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\frac{(x+y)d\omega}{(xy+1)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-y(x+y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega=y$, то будем иметь $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=1$; $\dfrac{d\mu}{\mu}=-\dfrac{dy}{y}$.

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\dfrac{1}{y}$ (у нас $y\neq0$ в

(D_k); $k=\overline{1,2}$). Умножим обе части исходного уравнения на $\mu=\dfrac{1}{y}$. Получим уравнение

$$(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=0, \qquad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$. Здесь

$$\tilde{M}(x,y)=x+y;\quad \tilde{N}(x,y)=x+\frac{1}{y}\ \Rightarrow\ \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=1;\ \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=1;\ \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}.$$

Значит, уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$. Для этого берем в (D_k), $k=\overline{1,2}$, произвольную точку (x_0,y_0). $\tilde{M}(x,y)$ и $\tilde{N}(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(1,-1)$ и $(-1,1)$. $\mathbf{R}^2\setminus\{(1,-1);(-1,1)\}$ — множество точек единственности уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения). Имеем

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=\int_{x_0}^{x}(x+y)dx+\int_{y_0}^{y}\left(x_0+\frac{1}{y}\right)dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(x_0y+\ln|y|\right)\Big|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{x_0^2}{2}-x_0y+x_0y+\ln|y|-x_0y_0-\ln|y_0|=$$

$$=\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Пример 20. Решить уравнение $(x^2+2x+y)dx+(3x^2y-x)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=x^2+2x+y$; $N(x,y)=3x^2y-x\Rightarrow$

$$M(x,y),N(x,y)\in C(\mathbf{R}^2);\quad \frac{\partial M}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=6xy-1\ \Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y},$$

$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$ и (x_*, y_*), где $x_* \approx -2{,}08$, $y_* = -0{,}16$.

Из заданного уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ — решения этого уравнения.

Станем рассматривать уравнение в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$

$(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(1 - 3xy)$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{2(1-3xy)d\omega}{x(3xy-1)\frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 + 2x + y)\frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dx}{x}$. Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$ в (D_k), $k = \overline{1,2}$).

Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2}$. Получим уравнение

$$\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(3y - \frac{1}{x}\right)dy = 0, \tag{*}$$

равносильное исходному в областях (D_1) и (D_2). В (*) $\tilde{M}(x,y) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}$; $\tilde{N}(x,y) = 3y - \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k = \overline{1,2}$. Значит, уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах в (D_k), $k = \overline{1,2}$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k), $k=\overline{1,2}$. Имеем

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\left(3y-\frac{1}{x_0}\right)dy=$$

$$=\left(x+2\ln|x|-\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x_0}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x+2\ln|x|-\frac{y}{x}-x_0-2\ln|x_0|+$$

$$+\frac{y}{x_0}+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x_0}-\frac{3}{2}y_0^2+\frac{y_0}{x_0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=x+2\ln|x|-\frac{y}{x}+\frac{3}{2}y^2+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x+2\ln|x|-\dfrac{y}{x}+\dfrac{3}{2}y^2=C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Пример 21. Решить уравнение $xydx-(y^3+x^2y+x^2)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=xy$; $N(x,y)=-y^3-x^2y-x^2 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y}=x$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2xy-2x \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,\\0<x<+\infty\end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях $(D_1)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ 0<y<+\infty;\end{cases}$

$(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ -\infty<y<0.\end{cases}$ Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=x(3+2y)$;

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega=\frac{x(3+2y)d\omega}{-(y^3+x^2y+x^2)\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-xy\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega=y$, то будет $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=1$; $\dfrac{d\mu}{\mu}=-\dfrac{3+2y}{y}dy$.

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu=\dfrac{e^{-2y}}{y^3}$ (у нас $y\neq 0$ в (D_k), $k=\overline{1,2}$). Умножим обе части заданного уравнения на $\mu=\dfrac{e^{-2y}}{y^3}$. Получим уравнение

$$\frac{xe^{-2y}}{y^2}dx-\left(e^{-2y}+\frac{x^2}{y^2}e^{-2y}+\frac{x^2e^{-2y}}{y^3}\right)dy=0, \qquad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$. В (*) $\tilde{M}(x,y)=\dfrac{xe^{-2y}}{y^2}$; $\tilde{N}(x,y)=-\left(e^{-2y}+\dfrac{x^2}{y^2}e^{-2y}+\dfrac{x^2e^{-2y}}{y^3}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=-2x\left(\frac{e^{-2y}}{y^2}+\frac{e^{-2y}}{y^3}\right);\ \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=-2x\left(\frac{e^{-2y}}{y^2}+\frac{e^{-2y}}{y^3}\right)\Rightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$$

в (D_k), $k=\overline{1,2}$. Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл уравнения (*) в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$. (Тем самым мы найдем общий интеграл исходного уравнения в областях (D_k), $k=\overline{1,2}$.) Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k), $k = \overline{1,2}$. Пусть это будет точка $(0,1)$. Имеем

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy = \int\limits_{0}^{x} \frac{xe^{-2y}}{y^2}dx - \int\limits_{1}^{y} e^{-2y}dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \left.\frac{x^2e^{-2y}}{2y^2}\right|_{x=0}^{x=x} + \left.\frac{e^{-2y}}{2}\right|_{y=1}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2e^{-2y}}{2y^2} + \frac{e^{-2y}}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{x^2e^{-2y}}{2y^2} + \frac{e^{-2y}}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{e^{-2y}}{2}\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right) = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Пример 22. Решить уравнение $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y-1)dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2 - y^2 + y$; $N(x,y) = x(2y-1) \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$.

$M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$ и $(0,1)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x=0, \\ 1<y<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ 0<y<1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ -\infty<y<0 \end{cases}$ — решения этого уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в открытой левой и правой полуплоскостях, т. е. в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ и $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2(1-2y)$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega = \frac{2(1-2y)}{x(2y-1)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 - y^2 + y)\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = 1$; $\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = 0$; $\dfrac{d\mu}{\mu} = -\dfrac{2}{x}dx$. Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu = \dfrac{1}{x^2}$ (у нас $x \neq 0$ в областях (D_k), $k = \overline{1,2}$). Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\left(2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0, \qquad (*)$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k), $k = \overline{1,2}$. Имеем

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} \text{ в } (D_k), \ k = \overline{1,2}.$$

Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k = \overline{1,2}$. Имеем

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(2\frac{y}{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)dy =$$

$$= \left(x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{y^2}{x_0} - \frac{y}{x_0}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} - x_0 - \frac{y^2}{x_0} + \frac{y}{x_0} + \frac{y^2}{x_0} - \frac{y}{x_0} - \frac{y_0^2}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} =$$

$$= x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + \dfrac{y^2}{x} - \dfrac{y}{x} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Пример 23. Решить уравнение $(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = 2x^2y^2 + y$; $N(x,y) = x^3y - x \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^2y + 1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y - 1 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. Из уравнения видно непосредственно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = x^2y + 2$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{(x^3y - x)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - (2x^2y^2 + y)\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = y$; $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{x^3y^2 - xy - 2x^3y^2 - xy} = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{-xy(x^2y + 2)} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu = \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{1}{xy}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$). Умножаем обе части заданного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{xy}$. Получаем уравнение

$$\underbrace{\left(2xy+\frac{1}{x}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\left(x^2-\frac{1}{y}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0, \qquad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=2x$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=2x \Rightarrow \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Для этого берем произвольную точку (x_0,y_0) в (D_k). Имеем

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(2xy+\frac{1}{x}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(x_0^2-\frac{1}{y}\right)dy=$$

$$=\left(x^2y+\ln|x|\right)\Big|_{x=x_0}^{x=x}+\left(x_0^2y-\ln|y|\right)\Big|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=x^2y+\ln|x|-x_0^2y-\ln|x_0|+x_0^2y-\ln|y|-x_0^2y_0+$$

$$+\ln|y_0|=x^2y+\ln|x|-\ln|y|+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x^2y+\ln|x|-\ln|y|=C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

Пример 24. Решить уравнение $(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=(2x^2y^3-1)y$; $N(x,y)=(4x^2y^3-1)x \Rightarrow$ $M(x,y), N(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=8x^2y^3-1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=12x^2y^3-1 \Rightarrow$ $\dfrac{\partial M}{\partial y},\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$. Из заданного уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = -4x^2y^3$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{-4x^2y^3 d\omega}{(4x^3y^3 - x)\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - (2x^2y^4 - y)\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = y$; $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-4x^2y^3 d\omega}{4x^3y^4 - xy - 2x^3y^4 + xy} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ, например, функцию $\mu = \dfrac{1}{\omega^2} \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{(xy)^2}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в областях (D_k), $k = \overline{1, 4}$). Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x^2y^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(2y^2 - \frac{1}{x^2y}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(4xy - \frac{1}{xy^2}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \tag{*}$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=4y+\frac{1}{x^2y^2};\ \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=4y+\frac{1}{x^2y^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}\ \text{в}\ (D_k),\ k=\overline{1,4}.$$

Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах в (D_k), $k=\overline{1,4}$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а следовательно, и исходного уравнения) в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(2y^2-\frac{1}{x^2y}\right)dx+\int_{y_0}^{y}\left(4x_0y-\frac{1}{x_0y^2}\right)dy=$$

$$=\left(2y^2x+\frac{1}{xy}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x}+\left(2x_0y^2+\frac{1}{x_0y}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=2xy^2+\frac{1}{xy}-2x_0y^2-\frac{1}{x_0y}+2x_0y^2+\frac{1}{x_0y}-2x_0y_0^2-\frac{1}{x_0y_0}=$$

$$=2xy^2+\frac{1}{xy}+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 2xy^2+\dfrac{1}{xy}=C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$. ◀

§9. Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$\underbrace{f_1(x)g_1(y)}_{=M(x,y)}dx+\underbrace{f_2(x)g_2(y)}_{=N(x,y)}dy=0. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $f_1(x),f_2(x)\in C(a,b)$, (a,b) лежит на оси Ox, а функции $g_1(y),g_2(y)\in C(c,d)$, (c,d) лежит на оси Oy $\Rightarrow$ $M(x,y)=f_1(x)g_1(y)$; $N(x,y)=f_2(x)g_2(y)\in C(D)$, где $(D)=$

$=(a,b)\times(c,d)$. Пусть $x=x_i$, $i=\overline{1,m}$ — вещественные корни уравнения $f_2(x)=0$, а $y=y_j$, $j=\overline{1,n}$ — вещественные корни уравнения $g_1(y)=0$. Непосредственно из уравнения (1) видно, что $x=x_i$ ($y\neq y_j$, $j=\overline{1,n}$), $i=\overline{1,m}$, а также $y=y_j$ ($x\neq x_i, i=\overline{1,m}$), $j=\overline{1,n}$, являются решениями уравнения (1). Отметим, что в областях

$$(D_{ij})=\begin{cases}x_i<x<x_{i+1},\\ y_j<y<y_{j+1},\end{cases}\quad i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n},\ x_0=a,\ x_{m+1}=b,\ y_0=c,\ y_{n+1}=d,$$

$f_2(x)\neq 0$ и $g_1(y)\neq 0$. Точки (x_i,y_j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, — особые точки уравнения (1).

Рассмотрим функцию $\mu(x,y)=\dfrac{1}{f_2(x)g_1(y)}$; эта функция определена и непрерывна в каждой из областей (D_{ij}), $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$. Покажем, что $\mu(x,y)$ является интегрирующим множителем для уравнения (1) в каждой из областей (D_{ij}). Действительно, умножив обе части уравнения (1) на $\mu(x,y)=\dfrac{1}{f_2(x)g_1(y)}$, получаем

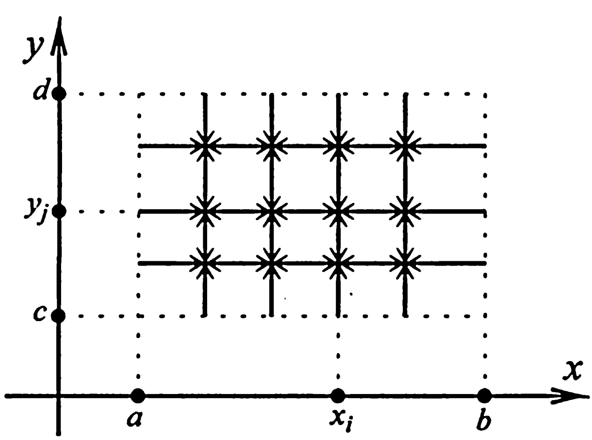

Рис. 1.19. К уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0. \qquad (2)$$

Отметим, что уравнение (2) равносильно уравнению (1) в каждой (D_{ij}) и что (2) — уравнение с разделенными переменными, а следовательно, (2) — уравнение в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл уравнения (2) (а значит, и уравнения (1)) в каждой из областей (D_{ij}). Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0)\in(D_{ij})$. Будем иметь $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+$ $+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy \Rightarrow u(x,y)=C$ — общий интеграл в (D_{ij}).

Пример. Решить уравнение $(x^2-1)dy+2xy^2dx=0$.

▶ Непосредственно из уравнения видим, что $\begin{cases} y=0, \\ -\infty<x<-1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0, \\ -1<x<1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0, \\ 1<x<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ 0<y<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ -\infty<y<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ 0<y<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ -\infty<y<0 \end{cases}$ — решения заданного уравнения. Точки $(-1,0)$ и $(1,0)$ — особые точки уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1)=\begin{cases} 1<x<+\infty, \\ 0<y<+\infty; \end{cases} \quad (D_2)=\begin{cases} -1<x<1, \\ 0<y<+\infty; \end{cases} \quad (D_3)=\begin{cases} -\infty<x<-1, \\ 0<y<+\infty; \end{cases}$$

$$(D_4)=\begin{cases} -\infty<x<-1, \\ -\infty<y<0; \end{cases} \quad (D_5)=\begin{cases} -1<x<1, \\ -\infty<y<0; \end{cases} \quad (D_6)=\begin{cases} 1<x<+\infty, \\ -\infty<y<0. \end{cases}$$

Каждая из областей (D_k) ($k=\overline{1,6}$) — область единственности для заданного уравнения. Рассмотрим функцию $\mu(x,y)=\dfrac{1}{y^2(x^2-1)}$.

Она определена и непрерывна в каждой (D_k), $k=\overline{1,6}$, и является интегрирующим множителем для исходного уравнения в (D_k), $k=\overline{1,6}$. Действительно, умножив обе части заданного уравнения на $\mu(x,y)$, получаем: $\dfrac{2xdx}{x^2-1}+\dfrac{dy}{y^2}=0$ — уравнение в полных дифференциалах. Полученное уравнение равносильно исходному в областях (D_k), $k=\overline{1,6}$.

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного уравнения) в (D_k), $k=\overline{1,6}$. Для этого берем произвольную точку $(x_0,y_0)\in(D_k)$. Будем иметь

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{2xdx}{x^2-1}+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2}=\ln\left|x^2-1\right|\Big|_{x=x_0}^{x=x}-\frac{1}{y}\Big|_{y=y_0}^{y=y}=$$

$$=\ln\left|x^2-1\right|-\frac{1}{y}\underbrace{-\ln\left|x_0^2-1\right|+\frac{1}{y_0}}_{=C_1\text{ (const)}}=\ln\left|x^2-1\right|-\frac{1}{y}+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln\left|x^2-1\right|-\dfrac{1}{y}=C$ — общий интеграл уравнения в (D_k), $k=\overline{1,6}$. ◀

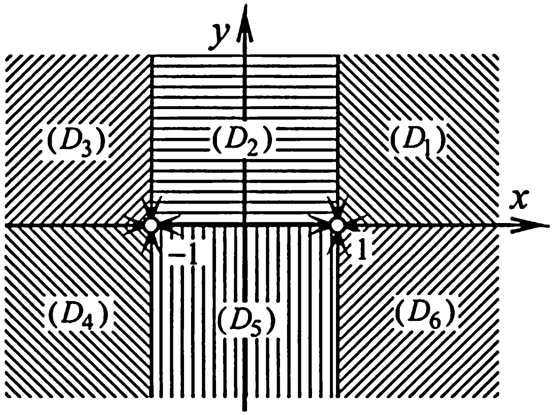

Рис. 1.20. К примеру

§10. Линейные уравнения первого порядка

Так называются уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

(в (1) y и y' входят в первой степени и не перемножаются). Считаем, что функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в промежутке (a,b). Запишем уравнение (1) в виде, разрешенном относительно y':

$$y' = -\underbrace{p(x)y + q(x)}_{=f(x,y)\ (\text{обознач.})}. \tag{1'}$$

Ясно, что $f(x,y) \in C(D)$, где $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Имеем далее

$f'_y(x,y) = -p(x) \Rightarrow f'_y(x,y) \in C(D)$. Значит, (D) — область единственности уравнения (1′) (а следовательно, и уравнения (1)).

Вывод: через каждую точку $(x_0, y_0) \in (D)$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

Существует несколько методов решения линейного уравнения.

1°. Метод интегрирующего множителя. Покажем, что функция $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ является интегрирующим множителем для уравнения (1). Для этого перепишем уравнение (1) в виде

$$[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0. \tag{1''}$$

Умножим обе части уравнения (1″) на $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Получим

$$\underbrace{e^{\int p(x)dx}\big(p(x)y - q(x)\big)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{e^{\int p(x)dx}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0. \tag{2}$$

Имеем $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = p(x)e^{\int p(x)dx}$; $\dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \Rightarrow \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D).

Следовательно, (2) — уравнение в полных дифференциалах.

Так как уравнение (2) равносильно уравнению (1), то, найдя общий интеграл уравнения (2) в (D), мы найдем тем самым общий интеграл исходного уравнения (1).

Замечание. Формула для общего решения уравнения (1) может быть получена следующим образом. Умножаем обе части уравнения (1) на $\mu = e^{\int p(x)\,dx}$. Получаем

$$(y' + p(x)y)\,e^{\int p(x)\,dx} = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}. \tag{3}$$

Легко видеть, что уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)\,dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)\,dx} \;\Rightarrow\; ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right). \tag{4}$$

2°. Метод Бернулли. Метод Бернулли нахождения решения линейного уравнения (1) состоит в следующем: ищем решение $y(x)$ уравнения (1) в виде произведения двух функций, а именно, в виде

$$y = u(x)v(x). \tag{5}$$

Имеем $y'_x = u'_x v + uv'_x$. Поэтому уравнение (1) запишется так:

$$u'_x v + uv'_x + p(x)uv = q(x) \Rightarrow u'_x v + u\left(v'_x + p(x)v\right) = q(x). \tag{6}$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения: $v'_x + p(x)v = 0$, например,

$$v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{7}$$

При таком выборе функции $v(x)$ уравнение (6) примет вид: $u'_x v = q(x)$, т. е. $e^{-\int p(x)\,dx}\dfrac{du}{dx} = q(x) \;\Rightarrow\; du = q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx \;\Rightarrow$ $u = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C$, где C — произвольная постоянная. А тогда

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right).$$

Видим, что для решения $y(x)$ уравнения (1) снова получена формула (4).

3.° Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Уравнение (1), в котором $q(x) \not\equiv 0$, $x \in (a,b)$, называется *линейным неоднородным*. Уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{8}$$

условимся называть линейным однородным, соответствующим линейному неоднородному уравнению (1). Рассмотрим сначала уравнение (8). Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{9}$$

где C — произвольная постоянная.

Метод Лагранжа (*метод вариации произвольной постоянной*) состоит в том, что решение линейного неоднородного уравнения (1) ищется в форме, аналогичной форме (9), а именно:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{10}$$

где $C(x)$ уже не постоянная, а искомая функция от x. Из (10) находим

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{11}$$

Подставив выражения для y и y' из (10) и (11) в уравнение (1), получим

$$\underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,C(x)e^{-\int p(x)dx}}_{=y'} + p(x)\,\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)dx}}_{=y} = q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Окончательно, согласно равенству (10) для y, получаем

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Видим, что и здесь для решения $y(x)$ уравнения (1) получена формула (4).

Пример 1. Решить уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

▶ Заданное уравнение — линейное; y и y' входят в уравнение в первой степени и не перемножаются. Здесь $p(x) = \cos x$; $q(x) = e^{-\sin x} \Rightarrow p(x),\ q(x) \in C(-\infty,+\infty)$. Найдем решения этого уравнения всеми тремя методами.

1. (Метод интегрирующего множителя.) $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$ — интегрирующий множитель для заданного

уравнения. Умножаем обе части исходного уравнения на $\mu(x) = e^{\sin x}$. Так как $\mu(x) \neq 0$, то получаем равносильное уравнение $(y' + y\cos x)e^{\sin x} = 1$ или $\frac{d}{dx}(ye^{\sin x}) = 1 \Rightarrow ye^{\sin x} = x + C \Rightarrow$ $ye^{\sin x} - x = C$ — общий интеграл заданного уравнения на $(\mathbf{R}^2)$.

2. (Метод Бернулли.) Станем искать решение заданного уравнения в виде

$$y = u(x)v(x).$$

Имеем $y' = u'v + uv'$. Поэтому исходное уравнение запишется так:

$$u'v + u(v' + v\cos x) = e^{-\sin x}.$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения

$$v' + v\cos x = 0 \Rightarrow v(x) = e^{-\sin x}.$$

При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем $u'e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C$. А тогда $y = u(x)v(x) = (x + C)e^{-\sin x} \Rightarrow ye^{\sin x} - x = C$.

3. (Метод Лагранжа.) Ищем сначала решения линейного однородного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, а именно: уравнения $y' + y\cos x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\cos x \Rightarrow$ $y = Ce^{-\sin x}$, где C — произвольная постоянная. Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\sin x}, \qquad (*)$$

где $C(x)$ — неизвестная функция, которую нужно найти. Мы хотим, чтобы (*) была решением заданного уравнения. Но тогда должно быть

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x \equiv e^{-\sin x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C'(x) \equiv 1 \Rightarrow C(x) = x + \tilde{C}$, где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная.

Подставляя это выражение для $C(x)$ в (*), получаем $y = (x + \tilde{C})e^{-\sin x} \Rightarrow ye^{\sin x} - x = \tilde{C}$ — общий интеграл заданного уравнения. ◀

Замечание 2. Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка оказываются линейными, если считать y аргументом, а $x(y)$ неизвестной функцией.

Пример 2. Решить уравнение $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy$.

▶ Отметим сразу, что заданное уравнение определено лишь в открытой верхней полуплоскости, так как должно быть $y > 0$. Видим, что уравнение не является линейным, если считать x аргументом, а $y(x)$ неизвестной функцией.

Если же считать y аргументом, а $x(y)$ неизвестной функцией, то заданное уравнение оказывается линейным. Действительно, имеем

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = 1 - 4\frac{\ln y}{y} \qquad (*)$$

(в (*) x и x'_y входят в первой степени). Это уравнение равносильно исходному, ибо делить на y можно (у нас $y > 0$). В этом уравнении $\tilde{p}(y) = -\frac{2}{y}$; $\tilde{q}(y) = 1 - 4\frac{\ln y}{y}$. Станем решать полученное уравнение методом интегрирующего множителя. Имеем $\mu(y) = e^{\int \tilde{p}(y)dy} = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$. Умножаем обе части (*) на $\mu = \frac{1}{y^2}$. Получим равносильное уравнение

$$\frac{1}{y^2}x'_y - \frac{2}{y^3}x = \frac{1}{y^2} - 4\frac{\ln y}{y^3},$$

или

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)'_y = \frac{1}{y^2} - 4\frac{\ln y}{y^3} \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \int\left(\frac{1}{y^2} - 4\frac{\ln y}{y^3}\right)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2} = -\frac{1}{y} - 4\int\frac{\ln y}{y^3}dy = \left[\begin{array}{lll} \ln y = u & \Rightarrow & du = \frac{dy}{y} \\ dv = \frac{dy}{y^3} & \Rightarrow & v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{y} - 4\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\ln y + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^3}\right) \Rightarrow \frac{x}{y^2} = -\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2}\ln y + \frac{1}{y^2} + C \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = Cy^2 + 2\ln y - y + 1$ — общее решение исходного уравнения. ◀

§11. Уравнение Бернулли

Так называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{1}$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$, так как при $m = 0$ уравнение (1) — линейное, а при $m = 1$ уравнение (1) и линейное, и с разделяющимися переменными. В (1) $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, определенные и непрерывные в некотором промежутке (a,b).

Разделим обе части уравнения (1) на y^m. Получим

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x). \tag{2}$$

(При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы делили обе части (1) на y^m. Следовательно, если $m > 0$, то мы могли потерять решение $y = 0$.)

В уравнении (2) делаем замену $y^{1-m} = z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция) $\Rightarrow$ $z'_x = (1-m)y^{-m}y'_x$ $\Rightarrow$ $y^{-m}y'_x = \dfrac{z'_x}{1-m}$ (у нас $m \neq 1$). Относительно новой неизвестной функции $z(x)$ уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{z'_x}{1-m} + p(x)z = q(x) \quad \text{или} \quad z'_x + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x + \tilde{p}(x)z = \tilde{q}(x). \tag{3}$$

(Здесь положено $\tilde{p}(x) = (1-m)p(x)$; $\tilde{q}(x) = (1-m)\tilde{q}(x)$.) Видим, что (3) — линейное уравнение относительно функции $z(x)$. Решая уравнение (3) и подставляя затем y^{1-m} вместо z, получим решение исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2y = y^2e^x$.

▶ Заданное уравнение является уравнением Бернулли. Здесь $p(x) = 2$; $q(x) = e^x$; $m = 2 (> 0)$. Непосредственно из уравнения видно, что $y = 0$ — решение уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в открытых верхней и нижней полуплоскостях, т. е. при $y > 0$ и при $y < 0$. В этих полуплоскостях заданное уравнение равносильно уравнению, полученному из него делением обеих его частей на y^2, а именно:

$$y'y^{-2}+\frac{2}{y}=e^x. \qquad (*)$$

Делаем замену: $\frac{1}{y}=z \Rightarrow z'_x=-\frac{1}{y^2}y'_x \Rightarrow y'_xy^{-2}=-z'_x$. Относительно новой неизвестной функции уравнение (*) примет вид $-z'_x+2z=e^x \Rightarrow z'_x-2z=-e^x$. Это — линейное уравнение. Найдем решение его методом Бернулли. Положим $z(x)=u(x)v(x) \Rightarrow z'_x=u'_xv+uv'_x$. Будем иметь $u'_xv+u(v'_x-2v)=-e^x$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v'_x-2v=0 \Rightarrow v=e^{2x}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение: $u'_xe^{2x}=-e^x \Rightarrow u'_x=-e^{-x} \Rightarrow u(x)=e^{-x}+C$. А тогда

$$z(x)=u(x)v(x)=e^{2x}(e^{-x}+C) \Rightarrow z(x)=e^x+Ce^{2x}.$$

Вспоминаем, что у нас $z=\frac{1}{y} \Rightarrow y=\frac{1}{z}$ и, следовательно, $y=\frac{1}{e^x+Ce^{2x}} \Rightarrow y(e^x+Ce^{2x})=1$ — общее решение исходного уравнения в верхней и нижней открытых полуплоскостях. ◀

Замечание. Решения уравнения Бернулли можно искать в виде $y(x)=u(x)v(x)$, не приводя его к линейному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение

$$y'-y\,\mathrm{tg}\,x=y^4\cos x.$$

▶ Заданное уравнение не определено на линиях:

$$\begin{cases} x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ -\infty<y<+\infty, \end{cases} \quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots.$$

Непосредственно из уравнения видим, что

$$\begin{cases} y=0, \\ (2k-1)\frac{\pi}{2}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$$

— решения исходного уравнения. Станем рассматривать наше уравнение в областях:

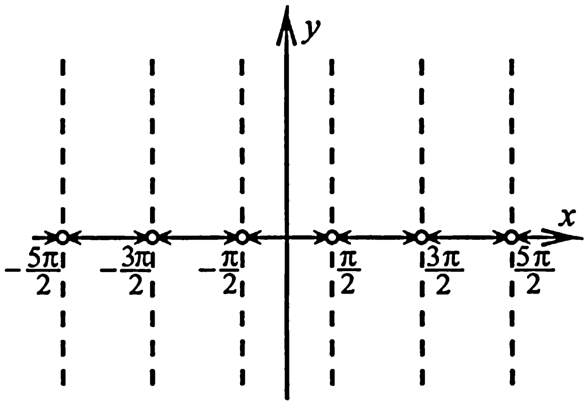

Рис. 1.21. К примеру 2

$$(D_k) = \begin{cases} (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots \\ 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

и

$$(\tilde{D}_k) = \begin{cases} (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots . \\ -\infty < y < 0, \end{cases}$$

Положим в исходном уравнении $y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y'_x = u'_x v + u v'_x$. Будем иметь

$$u'_x v + u(v'_x - v \operatorname{tg} x) = u^4 v^4 \cos x.$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v'_x - v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'_x \frac{1}{\cos x} = u^4 \frac{\cos x}{\cos^4 x} \Rightarrow u'_x = \frac{u^4}{\cos^2 x} \Rightarrow u^{-4} u'_x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}u^{-3}\right)'_x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow -\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}C \Rightarrow \frac{1}{u^3} = C - 3\operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^3 v^3} = C\cos^3 x - 3\sin x \cos^2 x \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{y^3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$ — общее решение исходного уравнения в (D_k) и $(\tilde{D}_k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ◀

Замечание. Уравнение вида $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ называется *уравнением Риккати*. Это уравнение в общем случае не решается в квадратурах. Однако, если удается найти какое-нибудь его частное решение $y = y_1(x)$, то заменой $y = y_1 + z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция) уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

▶ Действительно, пусть $y = y_1(x)$ — какое-нибудь частное решение уравнения Риккати. Тогда $y_1'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_1^2(x) \equiv \equiv r(x)$. Делаем замену $y = y_1 + z$. Получаем

$$y_1' + p(x)y_1 + z' + p(x)z + q(x)\left(y_1^2 + 2y_1 z + z^2\right) = r(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_1' + p(x)y_1' + q(x)y_1^2}_{\equiv r(x)} + z' + (p(x) + 2y_1 q(x))z + q(x)z^2 \equiv r(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' + \tilde{p}(x)z = \tilde{q}(x)z^2.$$

А это — уравнение Бернулли относительно неизвестной функции $z(x)$. Здесь положено $\tilde{p}(x) = p(x) + 2y_1(x)q(x)$ — известная функция; $\tilde{q}(x) = -q(x)$. ◀

В задачах 3—7, найдя путем подбора частное решение $y = y_1(x)$, привести заданные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

Задача 3. Дано уравнение $x^2dy + (xy + x^2y^2 - 4)dx = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = xy + x^2y^2 - 4$; $N(x,y) = x^2 \Rightarrow M, N \in C(\mathbf{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = x + 2x^2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $x = 0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение для $x \neq 0$, т.е. в левой и правой открытых полуплоскостях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ В областях (D_k), $k = 1, 2$, заданное уравнение равносильно уравнению

$$y' + \frac{1}{x}y + y^2 = \frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Попытаемся искать частное решение $y = y_1(x)$ уравнения (*) в виде $y(x) = \frac{a}{x}$, где a — постоянное число, пока неизвестное. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2.$$

Следовательно, функция $y_1(x) = \frac{2}{x}$ (а также функция $\tilde{y}_1 = -\frac{2}{x}$) является частным решением уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + \frac{2}{x}$. Получаем

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}z + \frac{2}{x^2} + \left(z^2 + \frac{4}{x}z + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{5}{x}z = -z^2$$

— уравнение Бернулли. Положим $z = u(x)v(x) \Rightarrow z' = u'v + uv'$. Будем иметь $u'v + u\left(v' + \frac{5}{x}v\right) = -u^2v^2$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v' + \frac{5}{x}v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x^5}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'\frac{1}{x^5} = -u^2\frac{1}{x^{10}} \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{4x^4} + \frac{C}{4} \Rightarrow u = \frac{4x^4}{Cx^4 - 1}.$$

А тогда $z = uv = \frac{4}{Cx^5 - x}$. Следовательно, $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$ в областях (D_1) и (D_2) ($x \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$). ◀

Задача 4. Решить уравнение $(x^2y^2 + 2)dx + 3x^2dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2y^2 + 2$; $N(x,y) = 3x^2 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке плоскости x, y. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $x = 0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать наше уравнение для $x \neq 0$, т. е. в левой и правой открытых полуплоскостях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ В областях (D_1) и (D_2) исходное уравнение равносильно уравнению

$$y' + \frac{1}{3}y^2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} \qquad (*)$$

(это — уравнение Риккати). Попытаемся найти частное решение уравнения (*) в виде $y = \frac{a}{x}$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{a^2}{3} - a = -\frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

Следовательно, функции $y_1 = \frac{1}{x}$ и $\tilde{y}_1 = \frac{2}{x}$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + \frac{1}{x}$. Получаем

$$z' - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\left(z^2 + 2\frac{z}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}z = -\frac{1}{3}z^2$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$ $z'_x = u'_x v + uv'_x$. Будем иметь $u'_x v + u\left(v'_x + \frac{2}{3}\frac{1}{x}v\right) = -\frac{1}{3}u^2v^2$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v'_x + \frac{2}{3}\frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow v(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'_x x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}u^2 x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{1}{u} = x^{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow u = \frac{1}{x^{1/3} + C}.$$

А тогда $z = uv = \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}$. Следовательно, $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}$ — общее решение исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2). (У нас $x \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$.) ◀

Задача 5. Решить уравнение $xdy + \left(-(2x+1)y + y^2 + x^2\right)dx = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = -(2x+1)y + y^2 + x^2$; $N(x,y) = x \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -(2x+1) + 2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0,0)$ и $(0,1)$. Из уравнения видно непосредственно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 1 < y < +\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать наше уравнение для $x \neq 0$, т. е. в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ В областях (D_1) и (D_2) исходное уравнение равносильно уравнению

$$y' - \frac{2x+1}{x} y + \frac{1}{x} y^2 = -x \tag{*}$$

(это — уравнение Риккати). Будем искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ax + b$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$a - \frac{2x+1}{x}(ax+b) + \frac{1}{x}(ax+b)^2 \equiv -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 \equiv -x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & a^2 - 2a = -1 \\ x & 2ab - 2b = 0 \\ x^0 & b^2 - b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1, \quad b = 0; \\ a = 1, \quad b = 1. \end{array}$$

Следовательно, функции $y_1 = x$ и $\tilde{y}_1 = x+1$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + x$. Получаем

$$z' + 1 - \frac{2x+1}{x}(z+x) + \frac{1}{x}(z^2 + 2zx + x^2) = -x \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{z^2}{x}$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$ $z' = u'v + uv'$. Будем иметь $u'v + \left(v' - \frac{v}{x}\right)u = -\frac{u^2v^2}{x}$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow v(x) = x$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение $u'x = -u^2x \Rightarrow u' = -u^2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x+C}$. А тогда $z = u(x)v(x) = \frac{x}{x+C}$. Следовательно, $y = x + \frac{x}{x+C}$ — общее решение исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2). ◀

Задача 6. Решить уравнение $(x^2 + y^2 - 2xy - 5)dx + dy = 0$.

▶ Здесь $M(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$; $N(x,y) = 1 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 2x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке плоскости x, y.

Запишем исходное уравнение в виде

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2. \qquad (*)$$

Попытаемся искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ax + b$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$a - 2x(ax+b) + (ax+b)^2 \equiv 5 - x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2 - 2a = -1 \\ x & 2ab - 2b = 0 \\ x^0 & b^2 + a = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} a = 1, & b = 2; \\ a = 1, & b = -2. \end{array}$$

Следовательно, функции $y_1(x) = x+2$ и $\tilde{y}_1 = x-2$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + (x+2)$. Получаем

$$z' + 1 - 2x(z + x + 2) + (z + x + 2)^2 = 5 - x^2 \Rightarrow z' + 4z = -z^2$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z = u(x)v(x) \Rightarrow z' = u'v + uv'$. Будем иметь $u'v + u(v' + 4v) = -u^2v^2$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v' + 4v = 0 \Rightarrow v(x) = e^{-4x}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'e^{-4x} = -u^2e^{-8x} \Rightarrow u' = -u^2e^{-4x} \Rightarrow \frac{1}{u} = -\frac{e^{-4x}}{4} + \frac{C}{4} \Rightarrow u = \frac{4}{C - e^{-4x}}.$$

А тогда $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1}$ — общее решение исходного уравнения на $\mathbf{R}^2$. ◀

Задача 7. Решить уравнение

$$y' + 2e^x y - y^2 = e^{2x} + e^x. \qquad (*)$$

▶ Запишем исходное уравнение в виде разрешенном относительно y':

$$y' = \underbrace{y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x}_{=f(x,y)}.$$

Имеем $f'_y(x,y) = 2y - 2e^x$. Видим, что $f(x,y)$ и $f'_y(x,y) \in C(\mathbf{R}^2) \Rightarrow$ множеством точек единственности уравнения является вся плоскость x, y. Видим далее, что заданное уравнение — уравнение Риккати. Попытаемся искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ae^x$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем $ae^x + 2ae^{2x} - a^2e^{2x} \equiv e^{2x} + e^x$. Приравниваем коэффициенты при e^x и e^{2x} в левой и правой частях полученного тождества:

$$\begin{array}{c|c} e^x & a = 1 \\ e^{2x} & 2a - a^2 = 1 \end{array} \Rightarrow a = 1.$$

Следовательно, функция $y_1 = e^x$ является частным решением уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + e^x$. Получаем вместо (*) уравнение

$$z' = z^2 \Rightarrow \ -\frac{1}{z} = x + C \Rightarrow z = -\frac{1}{x+C}.$$

Следовательно, $y = e^x - \dfrac{1}{x+C}$ — общее решение исходного уравнения на всей плоскости x, y. ◀

§12. Однородные уравнения

1°. Определение. Функция $u = f(x,y)$, заданная в некоторой области (D), называется *однородной* функцией степени p в области (D), если для каждой точки $(x,y) \in (D)$ и для каждого числа $t > 0$ такого, что точка $(tx,ty) \in (D)$, выполняется тождество

$$f(tx,ty) \equiv t^p f(x,y). \qquad (*)$$

Примеры.

1) Пусть $u = f(x,y) = x^2 + 5xy$. В этом случае

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + 5(tx)\cdot(ty) = t^2(x^2 + 5xy) = t^2 f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ u = f(x,y)$ — однородная функция степени $p = 2$.

2) Пусть $u = f(x,y) = \sqrt{2x - 5y}$. В этом случае

$$f(tx,ty) = \sqrt{2(tx) - 5(ty)} = t^{1/2}\sqrt{2x - 5y} = t^{1/2} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ f(x,y)$ — однородная функция степени $p = \dfrac{1}{2}$.

3) Пусть $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. В этом случае

$$f(tx,ty) = f\left(\frac{ty}{tx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) = t^0 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ — однородная функция степени $p = 0$.

2°. Формула Эйлера. Пусть функция $u = f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой области (D) и имеет там непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Пусть функция $u = f(x,y)$ является однородной функцией степени p в (D). Тогда в каждой точке $(x,y) \in (D)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot y=p\cdot f(x,y).$$

▶ Выберем и закрепим любую точку $(x_0,y_0)\in(D)$. В силу основного тождества (*) будем иметь

$$f(tx_0,ty_0)=t^p f(x_0,y_0) \qquad (**)$$

($f(tx_0,ty_0)$ — сложная функция аргумента t). Продифференцируем по t обе части (**). Получим

$$f'_x(tx_0,ty_0)\cdot x_0+f'_y(tx_0,ty_0)\cdot y_0=pt^{p-1}\cdot f(x_0,y_0).$$

В частности, при $t=1$ будем иметь

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot x_0+f'_y(x_0,y_0)\cdot y_0=pf(x_0,y_0).$$

У нас точка (x_0,y_0) — любая из области (D). Значит, и для каждой точки $(x,y)\in(D)$ будет $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=pf(x,y)$. ◀

3°. Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

называется *однородным*, если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются однородными одной и той же степени p.

Считаем, что функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области (D) и имеют там непрерывные частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $g'_x(x,y)$, $g'_y(x,y)$.

Пусть $(\tilde{D})\in(D)$ и $(\tilde{D})$ — множество точек единственности уравнения (1). Пусть в точках области $(\tilde{D})$ $xf(x,y)+yg(x,y)$ не обращается в нуль. Покажем, что тогда функция $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xf(x,y)+yg(x,y)}$ является интегрирующим множителем для уравнения (1) в $(\tilde{D})$.

В самом деле, умножим обе части уравнения (1) на $\mu(x,y)$. Получим

$$\underbrace{\frac{f}{xf+yg}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{\frac{g}{xf+yg}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0. \qquad (*)$$

Рассмотрим разность $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}-\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$. Имеем

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{xf+yg}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{xf+yg}\right)=$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(xf+yg)-f\cdot\left(x\frac{\partial f}{\partial y}+g+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\frac{\partial g}{\partial x}(xf+yg)+g\cdot\left(f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{(xf+yg)^2}=$$

$$=\frac{yg\frac{\partial f}{\partial y}-yf\frac{\partial g}{\partial y}-xf\frac{\partial g}{\partial x}+xg\frac{\partial f}{\partial x}}{(xf+yg)^2}=\frac{g\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)-f\left(x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)}{(xf+yg)^2}.$$

По условию, функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ — однородные одной и той же степени p. Но тогда по формуле Эйлера в каждой точке $(x,y)\in(\tilde{D})$ будет $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=p\cdot f$; $x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=p\cdot g$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\frac{p\cdot f\cdot g-p\cdot g\cdot f}{(xf+yg)^2}\equiv 0 \text{ в } (\tilde{D}) \Rightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}, \text{ в } (\tilde{D}).$$

Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах в $(\tilde{D})$ $\Rightarrow$ $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xf(x,y)+yg(x,y)}$ — интегрирующий множитель для уравнения (1).

Замечание. Замена $y=ux$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция, приводит однородное уравнение (1) к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 1. Решить уравнение $(x+2y)dx-xdy=0$.

▶ Здесь $f(x,y)=x+2y$; $g(x,y)=-x$ $\Rightarrow$ $f(x,y),g(x,y)\in C(\mathbf{R}^2)$. $\frac{\partial f}{\partial y}=2$; $\frac{\partial g}{\partial x}=-1$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial x}\in C(\mathbf{R}^2)$. $f(x,y)$, $g(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — однородные одной и той же степени $p=1$ в $\mathbf{R}^2$. Имеем

$$xf(x,y)+yg(x,y)=x(x+2y)-xy=x^2+xy=x(x+y)=0$$

на линиях: $x=0$, $y=-x$.

Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} x=0, \\ 0<y<+\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ -\infty<y<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x, \\ -\infty<x<0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x, \\ 0<x<+\infty \end{cases}$$

— решения исходного уравнения.

Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

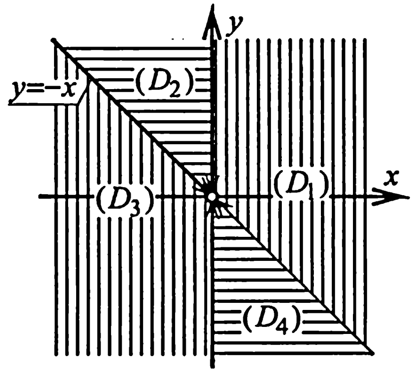

Рис. 1.22. К задаче 1

$$(D_1)=\begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -x<y<+\infty; \end{cases} \quad (D_2)=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ -x<y<+\infty; \end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases} -\infty<x<0, \\ -\infty<y<-x; \end{cases} \quad (D_4)=\begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -\infty<y<-x. \end{cases}$$

В каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$,

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xf+yg}=\frac{1}{x(x+y)}$$

является интегрирующим множителем исходного уравнения. Умножим обе части заданного уравнения на $\mu=\dfrac{1}{x(x+y)}$. Получим

$$\underbrace{\frac{x+2y}{x^2+xy}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx-\underbrace{\frac{1}{x+y}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0. \qquad (*)$$

Это уравнение равносильно исходному в (D_k). Имеем

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2(x+y)-(x+2y)}{(x+y)^2}=\frac{1}{(x+y)^2};\ \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\frac{1}{(x+y)^2}\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения). Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k), $k = \overline{1,4}$. Будем иметь

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \tilde{M}(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} \tilde{N}(x_0,y)dy = \int_{x_0}^{x} \frac{x+2y}{x(x+y)}dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{x_0+y} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+y} \right) dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{x_0+y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \left(2\ln|x| - \ln|x+y|\right)\Big|_{x=x_0}^{x=x} - \ln|x_0+y|\Big|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+y| - 2\ln|x_0| + \ln|x_0+y| - \ln|x_0+y| + \ln|x_0+y_0| =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+y| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\ln|x| - \ln|x+y| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k), $k = \overline{1,4}$.

Второй способ решения задачи 1.

В заданном уравнении $f(x,y) = x + 2y$; $g(x,y) = -x \Rightarrow f(x,y)$, $g(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$; $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$.

Функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0,0)$. $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени $p = 1$ в $\mathbf{R}^2$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ — решения исходного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение для $x \neq 0$, т. е. в левой и правой открытых полуплоскостях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$

В заданном уравнении делаем замену: $y = u \cdot x$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Будем иметь

$$(x+2ux)dx - x(udx + xdu) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\text{так как } x \neq 0 \text{ в } (D_1) \text{ и } (D_2))$$

$$\Leftrightarrow (1+2u)dx - udx - xdu = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1+u)dx - xdu = 0. \qquad (**)$$

Замечаем, что (**) является уравнением с разделяющимися переменными. Непосредственно из уравнения (**) видно, что $\begin{cases} u=-1, \\ 0<x<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} u=-1, \\ -\infty<x<0 \end{cases}$ — решения уравнения (**) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=-x, \\ 0<x<+\infty; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-x, \\ -\infty<x<0 \end{cases}$ — решения исходного уравнения в (D_1) и в (D_2) соответственно.

Станем рассматривать уравнение (**) в областях:

$$(\tilde{D}_1) = \begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -1<u<+\infty; \end{cases} \quad (\tilde{D}_2) = \begin{cases} -\infty<x<0, \\ -1<u<+\infty; \end{cases}$$

$$(\tilde{D}_3) = \begin{cases} -\infty<x<0, \\ -\infty<u<-1; \end{cases} \quad (\tilde{D}_4) = \begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -\infty<u<-1. \end{cases}$$

В областях $(\tilde{D}_k)$ уравнение (**) равносильно уравнению $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{du}{u+1} = 0$ ($\mu(x,u) = \dfrac{1}{x(1+u)}$ — интегрирующий множитель уравнения (**)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u+1} = \ln|x|\Big\|_{x=x_0}^{x=x} - \ln|u+1|\Big\|_{u=u_0}^{u=u} =$$

$$= \ln|x| - \ln|x_0| - \ln|u+1| + \ln|u_0+1| = \ln|x| - \ln|u+1| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln|x| - \ln|u+1| = C$ — общий интеграл уравнения (**) в $(\tilde{D}_k)$, $k=\overline{1,4}$ $\Rightarrow$ $\ln|x| - \ln\left|\dfrac{y}{x}+1\right| = C$ $\Rightarrow$ $2\ln|x| - \ln|x+y| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях

$$(\tilde{\tilde{D}}_1) = \begin{cases} 0<x<+\infty, \\ -x<y<+\infty; \end{cases} \quad (\tilde{\tilde{D}}_2) = \begin{cases} -\infty<x<0, \\ -\infty<y<-x; \end{cases}$$

$$(\tilde{\tilde{D}}_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty; \end{cases} \quad (\tilde{\tilde{D}}_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Задача 2. Решить уравнение $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$.

▶ Здесь $f(x,y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$; $g(x,y) = -x$ определены и непрерывны в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < x; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ x < y < -x. \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x} \in C((D_1) \cup (D_2))$. $f(x,y)$, $g(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0;0)$. $f(x,y)$, $g(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени $p = 1$ в $(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, заданное уравнение является однородным. Имеем

$$xf(x,y) + yg(x,y) = xy + x\sqrt{x^2 - y^2} - xy = x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

на линиях $x = 0$; $y = x$; $y = -x$. Эти линии не входят в $(D_1) \cup (D_2)$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} y = x, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ -\infty < x < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Так как $xf + yg \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$, то функция $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xf + yg} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$ является интегрирующим множителем заданного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$. Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$. Получим

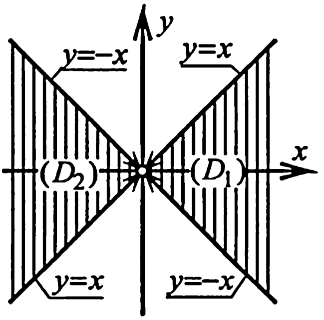

Рис. 1.23. К задаче 2

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx-\underbrace{\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}}_{=\tilde{N}(x,y)}=0. \qquad (*)$$

Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в $(D_1)\cup(D_2)$ $\Rightarrow$ Уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах в $(D_1)\cup(D_2)$. (Отметим, что уравнение (*) в $(D_1)\cup(D_2)$ равносильно исходному уравнению.) Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в $(D_1)\cup(D_2)$. Для этого берем произвольную точку (x_0,y_0) в (D_k), $k=\overline{1,2}$. Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{1}{x}\right)dx-\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{x_0^2-y^2}}$$

или

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{y_0}{x\sqrt{x^2-y_0^2}}+\frac{1}{x}\right)dx-\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Воспользуемся вторым выражением для $u(x,y)$, взяв в качестве точки (x_0,y_0) точку $(x_0,0)$, где $x_0\neq 0$. Получим

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}-\int_{0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}=\ln|x|\Big|_{x=x_0}^{x=x}-\operatorname{sgn}x\cdot\arcsin\frac{y}{x}\Big|_{y=0}^{y=y}=$$

$$=\ln|x|-\ln|x_0|-\operatorname{sgn}x\cdot\arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|-\operatorname{sgn}x\cdot\arcsin\frac{y}{x}+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow \ \ln|x| - \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin\dfrac{y}{x} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $y\cos\ln\dfrac{y}{x}dx - xdy = 0$.

▶ Должно быть: $x \neq 0$ и $\dfrac{y}{x} > 0 \Rightarrow$ Заданное уравнение определено в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$ В этом уравнении $f(x,y) = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$; $g(x,y) = -x \Rightarrow f(x,y), g(x,y) \in C((D_1) \cup (D_2))$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\ln\frac{y}{x} - y\sin\ln\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} = \cos\ln\frac{y}{x} - \sin\ln\frac{y}{x};\ \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial x} \in C((D_1) \cup (D_2))$. $f(x,y)$, $g(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке из $(D_1) \cup (D_2)$. Функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — однородные одной и той же степени $p = 1$ в $(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, заданное уравнение является однородным в $(D_1) \cup (D_2)$. В $(D_1) \cup (D_2)$ выражение

$$xf + yg = xy\cos\ln\frac{y}{x} - xy = xy\left(\cos\ln\frac{y}{x} - 1\right)$$

обращается в нуль на линиях $\begin{cases} y = xe^{2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ 0 < x < +\infty, \end{cases}$ и на линиях $\begin{cases} y = xe^{2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ -\infty < x < 0. \end{cases}$ Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся непосредственно, что эти линии являются интегральными кривыми. (На рис. 1.24 представлена схема расположения указанных линий.) В каждой из областей

$$(\tilde{D}_{1k}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ xe^{2\pi k} < y < xe^{2(k+1)\pi} \end{cases} \quad \text{и} \quad (\tilde{D}_{2k}) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ xe^{2(k+1)\pi} < y < xe^{2k\pi}, \end{cases}$$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $xf+yg\neq 0$ и, следовательно, функция $\mu=\dfrac{1}{xf+yg}=$ $=\dfrac{1}{xy\left(\cos\ln\dfrac{y}{x}-1\right)}$ является интегрирующим множителем в $(\tilde{D}_{1k})$ и в $(\tilde{D}_{2k})$. Умножим обе части исходного уравнения на μ. Получим в каждой $(\tilde{D}_{1k})$ и в $(\tilde{D}_{2k})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, уравнение, равносильное исходному:

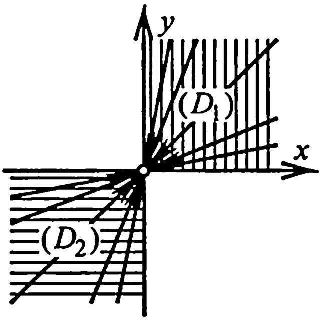

Рис. 1.24. К задаче 3

$$\underbrace{\frac{\cos\ln\frac{y}{x}}{x\left(\cos\ln\frac{y}{x}-1\right)}}_{=\tilde{M}(x,y)}dx-\underbrace{\frac{1}{y\left(\cos\ln\frac{y}{x}-1\right)}}_{=\tilde{N}(x,y)}dy=0. \qquad (*)$$

Имеем $\dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\dfrac{\sin\ln\frac{y}{x}}{xy\left(\cos\ln\frac{y}{x}-1\right)^2}$; $\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=\dfrac{\sin\ln\frac{y}{x}}{xy\left(\cos\ln\frac{y}{x}-1\right)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\partial\tilde{M}}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$ в $(\tilde{D}_{1k})$ и в $(\tilde{D}_{2k})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. $\Rightarrow$ Уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах в каждой из областей $(\tilde{D}_{1k})$ и $(\tilde{D}_{2k})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях $(\tilde{D}_{1k})$ и $(\tilde{D}_{2k})$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в $(\tilde{D}_{1k})$, $(\tilde{D}_{2k})$. Будем иметь

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\tilde{M}(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}\tilde{N}(x_0,y)dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[1-\frac{1}{2\sin^2\frac{\ln(y/x)}{2}}\right]\cdot\frac{dx}{x}+\int_{y_0}^{y}\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sin^2\frac{\ln(y/x_0)}{2}}dy=$$

$$=\left[\ln|x| - \operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}\right]\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} - \operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x_0)}{2}\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \ln|x| - \operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2} - \ln|x_0| +$$

$$+\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x_0)}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x_0)}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\ln(y_0/x_0)}{2} =$$

$$= \ln|x| - \operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln|x| - \operatorname{ctg}\dfrac{\ln(y/x)}{2} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях $(\tilde{D}_{1k})$, $(\tilde{D}_{2k})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ◀

§13. Простейшие уравнения, приводящиеся к однородному

I. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{1}$$

Отметим, что если в (1) $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (1) является однородным, ибо в этом случае $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\dfrac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right) = \tilde{f}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, а уравнение $y' = \tilde{f}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ — однородное. Следовательно, имеет смысл вести обсуждение, когда хотя бы одно из чисел c_1, c_2 отлично от нуля. Это мы и будем предполагать в дальнейшем. Могут иметь место два случая, а именно: случаи, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Первый случай. Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Сделаем замену $\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta, \end{cases}$ где ξ и η — новые переменные, а α и β — некоторые постоянные числа, пока неизвестные. Относительно новых переменных уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right). \tag{2}$$

Числа α и β выбираем такими, чтобы было

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Это всегда можно сделать, так как система (3) имеет и притом единственное решение, ибо определитель этой системы отличен от нуля (по условию).

При таком выборе чисел α и β будем иметь вместо (2)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \tilde{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \tag{4}$$

(4) — однородное уравнение. Решив его и возвращаясь к старым переменным, получим решение исходного уравнения (1).

Второй случай. Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} (= k) \Rightarrow a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Следовательно, уравнение (1) в этом случае запишется в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right). \tag{5}$$

Сделаем замену, положив $a_2x + b_2y = z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2}$. Относительно новой неизвестной функции уравнение (1) будет таким:

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx} = \underbrace{f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)}_{=f_1(z)\ \text{(обозначение)}} + \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = b_2 f_1(z) + a_2 . \qquad (6)$$

(6) — уравнение с разделяющимися переменными. Решив его и подставив вместо z его выражение $a_2x + b_2y$, найдем решение исходного уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=2x-4y+6$; $N(x,y)=x+y-3 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y}=-4$; $\frac{\partial N}{\partial x}=1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(1,2)$.

Видим, что $y' = f\left(\frac{-2x+4y-6}{x+y-3}\right)$ и что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Положим $\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta. \end{cases}$ Будем иметь

$$(2\xi - 4\eta + 2\alpha - 4\beta + 6)d\xi + (\xi + \eta + \alpha + \beta - 3)d\eta = 0.$$

Числа α и β берем такими, чтобы было

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + 3 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2.$$

А тогда замена $\begin{cases} x = \xi + 1, \\ y = \eta + 2 \end{cases}$ приводит к уравнению

$$(2\xi - 4\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0. \qquad (*)$$

Здесь $f(\xi,\eta) = 2\xi - 4\eta$; $g(\xi,\eta) = \xi + \eta$ — однородные функции степени $p=1$. Следовательно, (*) — однородное уравнение.

Имеем $f(\xi,\eta)$, $g(\xi,\eta)$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ — непрерывны на всей плоскости ξ,η; $f(\xi,\eta)$, $g(\xi,\eta)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Выражение

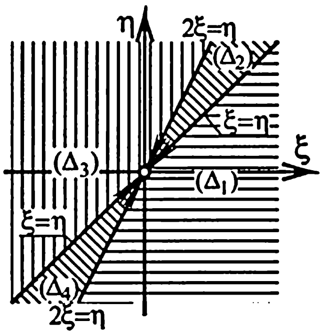

Рис. 1.25. К задаче 1

$$\xi f(\xi,\eta)+\eta g(\xi,\eta)=$$
$$=\xi(2\xi-4\eta)+\eta(\xi+\eta)=$$
$$=2\xi^2-3\xi\eta+\eta^2=(\xi-\eta)(2\xi-\eta)$$

обращается в нуль на линиях $\eta=\xi$, $\eta=2\xi$. Во всех остальных точках плоскости ξ,η выражение $\xi f(\xi,\eta)+\eta g(\xi,\eta)\neq 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\begin{cases}\eta=\xi,\\ 0<\xi<+\infty;\end{cases}\quad \begin{cases}\eta=\xi,\\ -\infty<\xi<0;\end{cases}\quad \begin{cases}\eta=2\xi,\\ 0<\xi<+\infty;\end{cases}\quad \begin{cases}\eta=2\xi,\\ -\infty<\xi<0\end{cases}$$

— решения уравнения (*). Станем рассматривать уравнение (*) в областях:

$$(\Delta_1)=\begin{cases}0<\xi<+\infty,\\ -\infty<\eta<\xi\end{cases}\cup\begin{cases}-\infty<\xi<0,\\ -\infty<\eta<2\xi;\end{cases}\quad (\Delta_2)=\begin{cases}0<\xi<+\infty,\\ \xi<\eta<2\xi;\end{cases}$$

$$(\Delta_3)=\begin{cases}-\infty<\xi<0,\\ \xi<\eta<+\infty\end{cases}\cup\begin{cases}0<\xi<+\infty,\\ 2\xi<\eta<+\infty;\end{cases}\quad (\Delta_4)=\begin{cases}-\infty<\xi<0,\\ 2\xi<\eta<\xi.\end{cases}$$

В каждой из областей (Δ_k), $k=\overline{1,4}$, $\mu(\xi,\eta)=\dfrac{1}{\xi f(\xi,\eta)+\eta g(\xi,\eta)}$ является интегрирующим множителем уравнения (*). Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\dfrac{1}{(\xi-\eta)(2\xi-\eta)}$. Получим

$$\underbrace{\frac{2\xi-4\eta}{(\xi-\eta)(2\xi-\eta)}}_{=\tilde{M}(\xi,\eta)}d\xi+\underbrace{\frac{\xi+\eta}{(\xi-\eta)(2\xi-\eta)}}_{=\tilde{N}(\xi,\eta)}d\eta=0. \qquad (**)$$

Отметим, что уравнение (**) равносильно уравнению (*) в (Δ_k), $k=\overline{1,4}$. Имеем $\frac{\partial\tilde{M}}{\partial\eta}=-2\frac{\xi^2+2\xi\eta-2\eta^2}{(\xi-\eta)^2(2\xi-\eta)^2}$; $\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\xi}=-2\frac{\xi^2+2\xi\eta-2\eta^2}{(\xi-\eta)^2(2\xi-\eta)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial\eta}\equiv\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\xi}$ в (Δ_k), $k=\overline{1,4}$ $\Rightarrow$ Уравнение (**) является уравнением в полных дифференциалах в (Δ_k), $k=\overline{1,4}$.

Найдем общий интеграл уравнения (**) (а значит, и уравнения (*)) в (Δ_k). Для этого берем произвольную точку (ξ_0,η_0) в (Δ_k), $k=\overline{1,4}$. Будем иметь

$$u(\xi,\eta)=\int_{\xi_0}^{\xi}\tilde{M}(\xi,\eta)d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta}\tilde{N}(\xi_0,\eta)d\eta=$$

$$=\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{2\xi-4\eta}{(\xi-\eta)(2\xi-\eta)}d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\xi_0+\eta}{(\xi_0-\eta)(2\xi_0-\eta)}d\eta=$$

$$=\int_{\xi_0}^{\xi}\left(\frac{6}{2\xi-\eta}-\frac{2}{\xi-\eta}\right)d\xi+\int_{\eta_0}^{\eta}\left(\frac{3}{\eta-2\xi_0}-\frac{2}{\eta-\xi_0}\right)d\eta=$$

$$=\left(3\ln|2\xi-\eta|-2\ln|\xi-\eta|\right)\Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi}+\left(3\ln|\eta-2\xi_0|-2\ln|\eta-\xi_0|\right)\Big|_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta}=$$

$$=3\ln|2\xi-\eta|-2\ln|\xi-\eta|-3\ln|2\xi_0-\eta|+2\ln|\xi_0-\eta|+$$

$$+3\ln|\eta-2\xi_0|-2\ln|\eta-\xi_0|-3\ln|\eta_0-2\xi_0|+2\ln|\eta_0-\xi_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta)=3\ln|2\xi-\eta|-2\ln|\eta-\xi|+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $3\ln|2\xi-\eta|-2\ln|\xi-\eta|=C$ — общий интеграл уравнения (*) в (Δ_k), $k=\overline{1,4}$.

Возвратимся к прежним переменным x и y. У нас $\xi=x-1$; $\eta=y-2$. Следовательно, $3\ln|2x-y|-2\ln|x-y+1|=C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях:

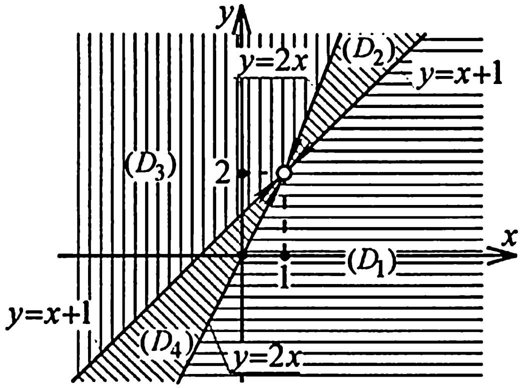

Рис. 1.26. К задаче 1

$$(D_1)=\begin{cases}1<x<+\infty,\\ -\infty<y<x+1\end{cases}\cup\begin{cases}-\infty<x<1,\\ -\infty<y<2x;\end{cases}\quad (D_2)=\begin{cases}1<x<+\infty,\\ x+1<y<2x;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<1,\\ x+1<y<+\infty\end{cases}\cup\begin{cases}1<x<+\infty,\\ 2x<y<+\infty;\end{cases}\quad (D_4)=\begin{cases}-\infty<x<1,\\ 2x<y<x+1.\end{cases}$$ ◀

Задача 2. Решить уравнение $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$.

▶ Здесь $M(x,y)=2x+y+1$; $N(x,y)=-4x-2y+3 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-4 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y};\dfrac{\partial N}{\partial x}\in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$, $N(x,y)$ не обращаются в нуль ни в одной точке плоскости x, y.

Видим, что $y'=f\left(\dfrac{2x+y+1}{4x+2y-3}\right)$ и что $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$. Поэтому делаем замену: $2x+y=z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение примет вид

$$(5z-5)dx+(3-2z)dz=0 \qquad (*)$$

((*) — уравнение с разделяющимися переменными). Непосредственно видно, что $\begin{Bmatrix}z=1,\\ -\infty<x<+\infty\end{Bmatrix}$ — решение уравнения (*) $\Rightarrow$

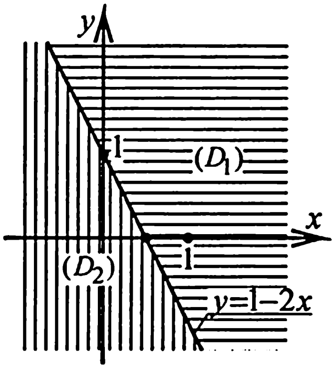

Рис. 1.27. К задаче 2

$\Rightarrow\ 2x+y=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, т. е. $y=1-2x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, — решение исходного уравнения.

Станем рассматривать уравнение (*) в областях

$$(\tilde{D}_1)=\begin{cases}1<z<+\infty,\\ -\infty<x<+\infty;\end{cases}$$

$$(\tilde{D}_2)=\begin{cases}-\infty<z<1,\\ -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

Умножим обе части уравнения (*) на $\mu=\dfrac{1}{z-1}$. Получим

$$5dx+\frac{3-2z}{z-1}dz=0. \qquad (**)$$

Уравнение (**) равносильно уравнению (*) в областях $(\tilde{D}_1)$, $(\tilde{D}_2)$ (в этих областях $z\neq 1$). Уравнение (**) является уравнением с разделенными переменными.

Найдем общий интеграл уравнения (**) (а значит, и уравнения (*)) в $(\tilde{D}_k)$, $k=1,2$. Для этого берем произвольную точку $(x_0,z_0)\in(\tilde{D}_k)$, $k=1,2$. Будем иметь

$$u(x,z)=\int_{x_0}^{x}5dx+\int_{z_0}^{z}\frac{3-2z}{z-1}dz=5x\Big|_{x=x_0}^{x=x}-\int_{z_0}^{z}\left(2-\frac{1}{z-1}\right)dz=$$

$$=5x-5x_0-2z+2z_0+\ln|z-1|-\ln|z_0-1|=5x-2z+\ln|z-1|+C_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 5x-2z+\ln|z-1|=C$ — общий интеграл уравнения (**) в $(\tilde{D}_k)$, $k=1,2$.

Возвратимся к прежним переменным x и y. У нас $z=2x+y$. Следовательно, $5x-4x-2y+\ln|2x+y-1|=C\Rightarrow x-2y+\ln|2x+y-1|=$ $=C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2), где $(D_1)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ 1-2x<y<+\infty;\end{cases}$ $(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ -\infty<y<1-2x.\end{cases}$ ◀

II. Некоторые дифференциальные уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^k$. Число k обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, нужно в уравнении сделать замену $y = z^k$. Требуя, чтобы полученное после замены уравнение было однородным, находят k, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Задача 3. Дано уравнение $(x^4 + y^2)dx - x^3dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x,y) = x^4 + y^2$; $N(x,y) = -x^3 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x^4 + z^{2k})}_{=f(x,z)}dx \underbrace{-kx^3z^{k-1}}_{=g(x,z)}dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ являются однородными одной и той же степени. Последнее будет лишь тогда, когда

$$4 = 2k = 3 + k - 1 \Rightarrow k = 2.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^2$. При $k = 2$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x^4 + z^4)}_{\tilde{f}(x,z)}dx \underbrace{-2x^3z}_{\tilde{g}(x,z)}dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = 4$. ◀

Задача 4. Дано уравнение $(y^3 + xy)dx - 2x^2dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x,y) = y^3 + xy$; $N(x,y) = -2x^2 \Rightarrow M(x,y)$, $N(x,y) \in C(\mathbf{R}^2)$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + x$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -4x \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbf{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(z^{3k}+xz^k)}_{=f(x,z)}dx\underbrace{-2kx^2z^{k-1}}_{=g(x,z)}dz=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$3k=k+1=2+k-1 \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y=z^{1/2}$. При $k=\frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(z^{3/2}+xz^{1/2})}_{=\tilde{f}(x,z)}dx\underbrace{-x^2z^{-1/2}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz=0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p=\frac{3}{2}$. ◀

Задача 5. Дано уравнение $(x^2y^4+1)ydx+2xdy=0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x,y)=x^2y^5+y$; $N(x,y)=2x \Rightarrow M(x,y),N(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$. $\frac{\partial M}{\partial y}=5x^2y^4+1$; $\frac{\partial N}{\partial x}=2 \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Делаем замену $y=z^k \Rightarrow dy=kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x^2z^{4k}+1)z^k}_{=f(x,z)}dx+\underbrace{2kxz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$2+5k=k=1+k-1 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному замене $y = z^{-\frac{1}{2}}$. При $k = -\frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x^2z^{-2}+1)z^{-1/2}}_{=\tilde{f}(x,z)}dx\underbrace{-xz^{-3/2}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = -\frac{1}{2}$. ◀

Задача 6. Дано уравнение $ydx + x(2xy+1)dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x,y) = y$; $N(x,y) = x(2xy+1) \Rightarrow M(x,y), N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 4xy+1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{z^k}_{=f(x,z)}dx + \underbrace{(2xz^k+1)x \cdot kz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$k = 2+k+k-1 = 1+k-1 \Rightarrow k = -1.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному замене $y = \frac{1}{z}$. При $k = -1$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\frac{1}{z}}_{=\tilde{f}(x,z)}dx - \underbrace{\left(\frac{2x}{z}+1\right)\frac{x}{z^2}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = -1$. ◀

Задача 7. Дано уравнение $\left(x - 4\sqrt{y}\right)dx + 2dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Должно быть $y \geq 0$. $\Rightarrow$ Уравнение следует рассматривать лишь в замкнутой верхней полуплоскости. Имеем $M(x,y) = x - 4\sqrt{y}$; $N(x,y) = 2$ $\Rightarrow$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ — непрерывны в замкнутой верхней полуплоскости. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{2}{\sqrt{y}}$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ — непрерывны в открытой верхней полуплоскости. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке. Делаем замену: $y = z^k$ $\Rightarrow$ $dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x - 4z^{k/2})}_{=f(x,z)}dx + \underbrace{2kz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$1 = \frac{k}{2} = k - 1 \Rightarrow k = 2.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^2$.

При $k = 2$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x - 4z)}_{=\tilde{f}(x,z)}dx + \underbrace{4z}_{=\tilde{g}(x,z)}\ dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = 1$. ◀

Задача 8. Дано уравнение $\left(y^2 - \dfrac{2}{x^2}\right)dx - dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Должно быть $x \neq 0$. $\Rightarrow$ Уравнение следует рассматривать лишь в открытых левой и правой полуплоскостях. Имеем $M(x,y) = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$; $N(x,y) = -1$ $\Rightarrow$ $M(x,y)$, $N(x,y)$ — непрерывны в открытых левой и правой полуплоскостях. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$;

$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ — непрерывны в открытых левой и правой полуплоскостях.

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{\left(z^{2k} - \frac{2}{x^2}\right)}_{=f(x,z)}dx \underbrace{-kz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$2k = -2 = k - 1 \Rightarrow k = -1.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \frac{1}{z}$.

При $k = -1$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2}\right)}_{=\tilde{f}(x,z)}dx + \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -2$. ◀

Задача 9. Дано уравнение $\left(y - y^2\sqrt{x - x^2y^2}\right)dx + 2xdy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x, y) = y - y^2\sqrt{x - x^2y^2}$; $N(x, y) = 2x$. Должно быть

$$x - x^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - xy^2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1-2y\sqrt{x-x^2y^2}+y^2\frac{x^2y}{\sqrt{x-x^2y^2}}=1+\frac{3x^2y^3-2xy}{\sqrt{x-x^2y^2}};\ \frac{\partial N}{\partial x}=2.$$

$M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в области $(D)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\end{cases}$ Делаем замену: $y=z^k \Rightarrow dy=kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{\left(z^k-z^{2k}\sqrt{x-x^2z^{2k}}\right)}_{=f(x,z)}dx+\underbrace{2kxz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых, $1=2+2k$ и, во-вторых, $k=2k+\frac{1}{2}=k \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$.

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y=\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

При $k=-\frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{1}{z}\sqrt{x-\frac{x^2}{z}}\right)}_{=\tilde{f}(x,z)}dx\underbrace{-x\frac{1}{z\sqrt{z}}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz=0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p=-\frac{1}{2}$. ◀

Задача 10. Дано уравнение $\left(\sqrt{x^6-y^4}+y^2\right)dx-\frac{2}{3}xydy=0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Должно быть

$$x^6 - y^4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq |x|^3 \Leftrightarrow -|x|^{3/2} \leq y \leq |x|^{3/2}.$$

$M(x,y) = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$; $N(x,y) = -\frac{2}{3}xy$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2y^3}{\sqrt{x^6 - y^4}} + 2y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{3}y$. $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в области $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -|x|^{3/2} < y < |x|^{3/2}. \end{cases}$ Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение запишется в виде

$$\underbrace{\left(\sqrt{x^6 - z^{4k}} + z^{2k}\right)}_{=f(x,z)} dx - \underbrace{\frac{2}{3}kxz^k z^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых, $6 = 4k$ и, во-вторых, $3 = 2k = 2k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$.

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^{3/2}$. При $k = \frac{3}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\left(\sqrt{x^6 - z^6} + z^3\right)}_{=\tilde{f}(x,z)} dx \underbrace{-xz^2}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = 3$. ◀

Задача 11. Дано уравнение $2ydx + (x^2y + 1)xdy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

▶ Здесь $M(x,y) = 2y$; $N(x,y) = (x^2y + 1)x \Rightarrow M(x,y), N(x,y) \in C(\mathrm{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathrm{R}^2)$. $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0,0)$. Делаем замену $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{2z^k}_{=f(x,z)}\, dx + \underbrace{(x^2z^k + 1)xkz^{k-1}}_{=g(x,z)}\, dz = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x,z)$ и $g(x,z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых, $2 + k = 0$ и, во-вторых, $k = 2 + 2k = k \Rightarrow k = -2$.

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \dfrac{1}{z^2}$.

При $k = -2$ уравнение (*) примет вид

$$\underbrace{\frac{2}{z^2}}_{=\tilde{f}(x,z)}\, dx - \underbrace{2\frac{x}{z^3}\left(\frac{x^2}{z^2} + 1\right)}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x,z)$ и $\tilde{g}(x,z)$ — однородные функции степени $p = -2$. ◀

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Лишь в простейших случаях уравнение (1) удается разрешить относительно y' и заменить его, следовательно, одним или несколькими уравнениями вида

$$y' = f_k(x, y), \quad k = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Так, например, уравнение

$$y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0 \tag{$\tilde{2}$}$$

в результате его решения относительно y' распадается для $y \neq 0$ на два уравнения: $y' = 1$ и $y' = -\dfrac{x}{y}$, откуда

$$y = x + C; \quad y^2 + x^2 = C. \tag{*}$$

Следовательно, все решения уравнения $(\tilde{2})$ содержатся в формулах (*). Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения $(\tilde{2})$ получается в результате наложения семейств (*) (рис. 2.1). Мы видим при этом, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ проходят ровно две интегральные кривые уравнения $(\tilde{2})$.

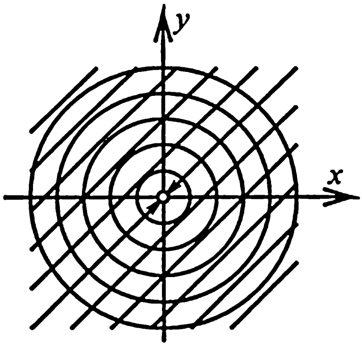

Рис. 2.1

В большинстве же случаев уравнение (1) не удается разрешить относительно y'.

Станем рассматривать x, y, y' как координаты точек трехмерного пространства. Тогда уравнение (1) будет определять в этом пространстве некоторую поверхность (S) (рис. 2.2). Пусть $(\bar{D})$ — проекция поверхности (S) на плоскость Oxy. Ясно, что только для точек $(x, y) \in (\bar{D})$ существуют значения y', которые совместно с x и y удовлетворяют уравнению (1). Поэтому о решениях уравнения (1) имеет смысл говорить лишь применительно к области $(\bar{D})$.

Возьмем любую точку $(x_0, y_0) \in (D)$ и рассмотрим уравнение

$$F(x_0, y_0, y') = 0. \qquad (3)$$

Пусть $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ — числа, которые являются различными вещественными корнями уравнения (3). Ради простоты ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение (3) имеет конечное число вещественных корней (рис. 2.3).

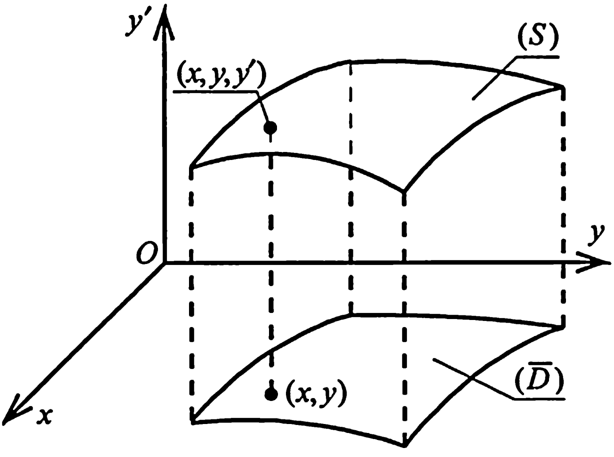

Рис. 2.2

Пусть $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$, — прямоугольный параллелепипед с центром в точке (x_0,y_0,y'_k). Пусть параллелепипеды $(\bar{P}_k)$ такие, что $(\bar{P}_i)\cap(\bar{P}_j)=\varnothing$, $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$. Предположим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$, функция $F(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x(x,y,y')$, $F'_y(x,y,y')$, $F'_{y'}(x,y,y')$ и что $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0,y_0,y'_k)}\neq 0$, $k=\overline{1,m}$. В этом случае точку (x_0,y_0) будем называть *обыкновенной точкой* уравнения (1). Всякую иную точку области (D), а также все точки границы области (D) будем называть *особыми точками* уравнения (1). Видим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$, выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций). Следовательно, существует окрестность точки $M_0(x_0,y_0)$: $\bar{u}_k(x_0,y_0)$, $k=\overline{1,m}$, в которой уравнение (1) определяет y' как однозначную непрерывную функцию от x и y: $y'=f_k(x,y)$, $k=\overline{1,m}$, причем функция $f_k(x,y)$ имеет в $\bar{u}_k(x_0,y_0)$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_k(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}$.

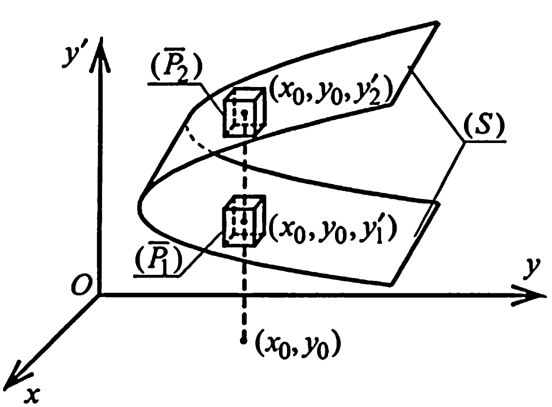

Рис. 2.3

Видим, таким образом, что если уравнение (1) рассматривать лишь в параллелепипеде $(\overline{P}_k)$ $(k=\overline{1,m})$, то мы будем находиться в условиях (уже изученного раньше) случая уравнения, разрешенного относительно производной.

Так как в $\overline{u}_k(x_0,y_0)$ функция $f_k(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f_k(x,y)}{\partial y}$, то по теореме о существовании и единственности решения уравнения, разрешенного относительно производной, заключаем, что через точку (x_0,y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y'=f_k(x,y)$, для которой $y'\big|_{M_0}=y'_k$ $(k=\overline{1,m})$.

Общий вывод: если точка $(x_0,y_0)\in(D)$ является обыкновенной точкой уравнения (1) и если уравнение (3) имеет m различных вещественных корней $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$, то через точку (x_0,y_0) проходят ровно m интегральных кривых уравнения (1). Эти кривые расположены в пределах окрестности $u(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), где

$$u(x_0,y_0)=\bigcap_{i=1}^{m}u_i(x_0,y_0).$$

Так как направления касательных к обсуждаемым кривым в точке (x_0,y_0) различны (поскольку они имеют различные угловые коэффициенты $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$), то эти кривые в точке (x_0,y_0) не могут касаться друг друга (рис. 2.4). Заметим, что если соотношение (3) определяет бесконечное множество значений y':

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_m, \dots,$$

то через точку (x_0,y_0) будет, очевидно, проходить бесконечное множество интегральных кривых с различными направлениями касательных в этой точке. (Здесь предполагается, конечно, что точка (x_0,y_0) — обыкновенная для уравнения (1).)

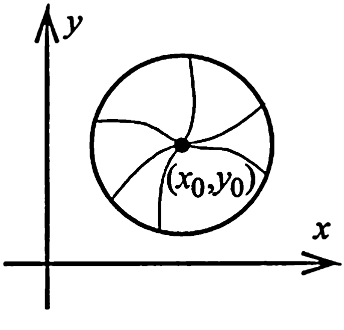

Рис. 2.4

В связи с тем, что соотношение (3) может давать для точки (x_0, y_0) более чем одно значение y', постановка задачи Коши для уравнения (1) в этом случае нуждается в уточнении. Именно задача Коши для дифференциального уравнения (1) состоит в том, чтобы найти решение этого уравнения, которое проходит через точку (x_0, y_0) и имеет в этой точке определенное направление (одно из направлений, задаваемых в этой точке дифференциальным уравнением).

Замечание. Если точка $M_0(x_0, y_0) \in (\bar{D})$ является особой точкой для уравнения (1), то одному значению y'_k, являющемуся вещественным корнем уравнения (3), может отвечать не одна, а несколько интегральных кривых уравнения (1), проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$. Может оказаться также, что значению y'_k не будет отвечать никакая интегральная кривая уравнения (1); вместо кривой может получиться точка. Но если одному значению y'_k отвечает несколько интегральных кривых уравнения (1), проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, то все эти кривые в точке M_0 имеют общую касательную (т. е. касаются друг друга в точке $M_0(x_0, y_0)$).

На рис. 2.5 представлена одна из возможных схем расположения интегральных кривых уравнения (1) в случае, когда точка $M_0(x_0, y_0)$ оказывается особой точкой этого уравнения. Если геометрическим местом особых точек уравнения (1) оказывается некоторая линия, то эту линию называют *особой линией* этого уравнения.

Из определения особых точек уравнения (1) ясно, что в области (D) их следует искать среди точек, являющихся проекциями на плоскость Oxy тех точек (x, y, y'), в окрестности которых не выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций).

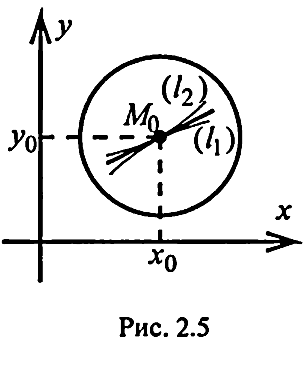

Рис. 2.5

Точками (x, y, y'), в окрестности которых не выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y', являются, следовательно, либо точки, где одновременно

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

либо точки, в окрестности которых нарушено условие существования и непрерывности функции $F(x,y,y')$ и ее частных производных $F'_x(x,y,y')$, $F'_y(x,y,y')$, $F'_{y'}(x,y,y')$.

Если предполагать, что функция $F(x,y,y')$ и ее частные производные по всем аргументам всюду существуют и непрерывны, то особые точки уравнения (1) в области (D) следует искать лишь среди точек, являющихся проекциями на плоскость Oxy тех точек (x,y,y'), в которых одновременно выполняются соотношения (4). Допустим, что каждое из уравнений системы (4) определяет в пространстве x, y, y' поверхность. Пусть это будут поверхности (S) и (S'). Равенства (4) будут выполняться одновременно вдоль линии (L) пересечения этих поверхностей (рис. 2.6). Проекция линии (L) на плоскость Oxy будет *особой линией* уравнения (1).

Заметим, что особая линия уравнения (1) представляет собой кривую, подозрительную на особое решение этого уравнения. Особая линия будет *особым решением* уравнения (1), если, во-первых, она является интегральной кривой этого уравнения и если, во-вторых, в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y^2+(y')^2-1=0.$$

Здесь $F(x,y,y')=y^2+(y')^2-1$, $F'_x=0$, $F'_y=2y$, $F'_{y'}=2y'$. Видим, что $F(x,y,y')$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные во всем пространстве $Oxyy'$. Станем рассматривать систему

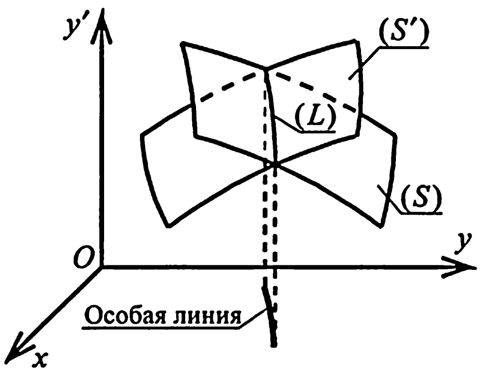

Рис. 2.6

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+(y')^2-1=0, \\ 2y'=0. \end{cases} \qquad (\tilde{4})$$

Линию (L), определяемую системой $(\tilde{4})$, спроектируем на плоскость Oxy. Для этого нужно исключить y' из системы $(\tilde{4})$. Исключая y' из системы $(\tilde{4})$, получаем особую линию

$$y^2=1,$$

распадающуюся на две прямые: $y=1$ и $y=-1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение функций $y=1$ и $y=-1$ убеждаемся, что они удовлетворяют этому уравнению. Значит, $y=1$ и $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, — интегральные линии.

В нашем примере исходное уравнение удается разрешить относительно y': $y'=\pm\sqrt{1-y^2}$ $\Rightarrow$ в полосе $\begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ -1<y<1 \end{cases}$ находим

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{1-y^2}}=dx \Rightarrow \pm\arcsin y=x+C \Rightarrow y=\pm\sin(x+C) \text{ —}$$

это общее решение заданного уравнения в области $\begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ -1<y<1. \end{cases}$

Решения $y=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, и $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, являются особыми решениями исходного уравнения, так как в каждой точке этих решений нарушается единственность решения задачи Коши.

Отметим, что через каждую точку $(x_0,y_0)\in\begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ -1<y<1 \end{cases}$ проходят ровно две интегральные кривые заданного уравнения с различными направлениями касательных в этой точке.

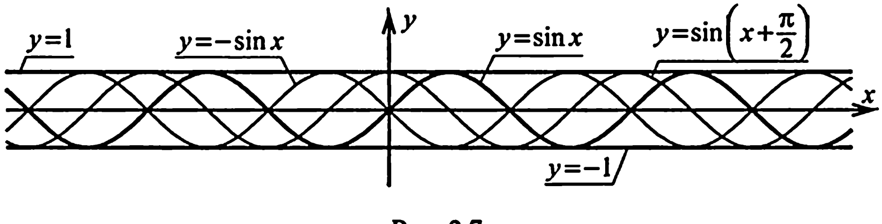

Рис. 2.7

§2. Метод введения параметра

Пусть имеется уравнение

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

Пусть (S) — поверхность, определяемая уравнением (1) в пространстве $Oxyy'$. Пусть (G) — некоторая область пространства $Oxyy'$, содержащая внутри себя поверхность (S). Предполагается, что функция $F(x,y,y')$ определена, непрерывна в области (G) и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x,y,y')$, $F'_y(x,y,y')$, $F'_{y'}(x,y,y')$. Пусть, далее, функция $y=\varphi(x)$ является решением уравнения (1) в некотором промежутке $\langle a,b\rangle$ и $y_0=\varphi(x_0)$, $y'_0=\varphi'(x_0)$, причем точка $x_0\in(a,b)$, а точка $(x_0,y_0,y'_0)\in(S)$, а следовательно, принадлежит (G).

Метод введения параметра основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. Если $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0,y_0,y'_0)}\neq 0$, то в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 существует и непрерывна $\varphi''(x)$ ($u(x_0)\subset(a,b)$).

▶ У нас (G) — область, и точка $(x_0,y_0,y'_0)\in(G)$. Следовательно, существует параллелепипед $(\overline{P})$, содержащий точку (x_0,y_0,y'_0) и содержащийся в (G), в котором выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций). По этой теореме уравнение (1) в некоторой окрестности $V(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) определяет y', как однозначную функцию от x и y:

$$y'=f(x,y), \tag{2}$$

причем функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в $V(x_0,y_0)$. ($V(x_0,y_0)\subset(D)$, где (D) — проекция поверхности (S) на плоскость Oxy.)

По условию, $y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y\big|_{x=x_0}=y_0$ (т. е. $\varphi(x_0)=y_0$). Следовательно, существует окрестность $u(x_0)$ точки x_0, в которой $y=\varphi(x)$ является решением уравнения (2) ($u(x_0)\subset(a,b)$). Но тогда для $x\in u(x_0)$:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)). \tag{3}$$

Продифференцируем обе части (3) по x. Получим

$$\varphi''(x) = f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{4}$$

Здесь $f'_x(x, \varphi(x))$, $f'_y(x, \varphi(x))$, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ — непрерывны в $u(x_0)$ как суперпозиции непрерывных функций. А тогда из (4) следует, что $\varphi''(x) \in C(u(x_0))$. ◀

Лемма 2. Если $\varphi''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 ($u(x_0) \subset (a, b)$) и если $\varphi''(x_0) \neq 0$, то решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) представимо в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{5}$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ в некоторой окрестности $V(t_0)$ точки t_0 имеют непрерывные производные и таковы, что

$$y'_x = t.$$

▶ Рассмотрим функцию $t = \varphi'(x)$, $x \in u(x_0)$. По условию, $\varphi''(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $\varphi''(x_0) > 0$. Так как $\varphi''(x)$ — непрерывная, то существует окрестность $\tilde{u}(x_0)$ точки x_0, в которой $\varphi''(x) > 0$ ($\tilde{u}(x_0) \subset u(x_0)$). Но тогда в $\tilde{u}(x_0)$ функция $t = \varphi'(x)$ строго возрастающая. Следовательно, существует обратная ей функция $x = x(t)$, определенная в некоторой окрестности $V(t_0)$ точки t_0 ($t_0 = \varphi'(x_0)$) и имеющая там непрерывную производную x'_t, ибо $x'_t = \dfrac{1}{t'_x} = \dfrac{1}{\varphi''(x)}$ ($\varphi''(x) \neq 0$).

Подставляя функцию $x = x(t)$ в равенство $y = \varphi(x)$, получаем

$$y = \varphi(x(t)), \text{ т. е. } y = y(t).$$

Ясно, что функция $y = y(t)$ определена и непрерывна в $V(t_0)$ как суперпозиция непрерывных функций и что она имеет в $V(t_0)$ непрерывную производную y'_t, ибо $y'_t = \varphi'_x(x(t)) \cdot x'_t$ ($\varphi'_x(x(t))$ — непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, x'_t — непрерывна по доказанному выше).

Соотношения

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in V(t_0),$$

дают нужное параметрическое представление решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1). ◀

Замечание 1.

1. Если $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, есть решение уравнения (1), подозрительное на особое, то $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x, \varphi(x), \varphi'(x))} = 0$, и, следовательно, мы не можем гарантировать существование и непрерывность $\varphi''(x)$ (см. лемму 1), а значит, не можем применить лемму 2, гарантирующую возможность нужного параметрического представления функции $y = \varphi(x)$ в виде (5).

2. Если уравнение (1) имеет решения вида $y = ax + b$, то $\varphi''(x) \equiv 0$ и, следовательно, лемма 2 не приложима. Значит, и в этом случае мы не можем гарантировать нужного параметрического представления этого решения.

Замечание 2. Методом введения параметра $t = y'$ очень часто выгодно искать решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно y', но зато разрешенных относительно x или y, т. е. уравнений вида

$$x = g(y, y') \text{ или } y = f(x, y'). \tag{6}$$

Этот метод в принципе позволяет найти все решения таких уравнений, за исключением, быть может, решений вида $y = ax + b$ и решений, подозрительных на особое решение.

Но решения вида $y = ax + b$, если таковые имеются, могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, а решения, подозрительные на особые, — методом, изложенным в предыдущем параграфе.

В качестве примера для отыскания решений дифференциального уравнения методом введения параметра рассмотрим уравнение

$$y = xy' + \varphi(y'), \tag{7}$$

где $\varphi(y')$ — любая функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'_{y'}$. ((7) — *уравнение Клеро.*)

▶ Положим

$$y' = t \text{ (т. е. } dy = t\,dx\text{)}. \tag{8}$$

Тогда

$$y = xt + \varphi(t) \tag{9}$$

и, следовательно, $dy = tdx + xdt + \varphi'(t)dt$. Так как $dy = tdx$ (см. (8)), то получаем $xdt + \varphi'(t)dt = 0$ или $(x + \varphi'(t))\,dt = 0$. В последнем соотношении нельзя считать $dt = 0$, ибо dt является дифференциалом независимой переменной. Поэтому $x + \varphi'(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\varphi'(t). \tag{10}$$

В силу соотношений (9) и (10), получаем следующее решение исходного уравнения (7):

$$\begin{cases} x = -\varphi'(t), \\ y = -t\varphi'(t) + \varphi(t). \end{cases} \tag{11}$$

Выясним, не имеет ли уравнение (7) решений вида

$$y = ax + b. \tag{12}$$

Подстановка в уравнение (7) дает

$$ax + b = x \cdot a + \varphi(a).$$

Отсюда видим, что если $b = \varphi(a)$, где a — любое число (станем обозначать его через C), то (12) будет решением уравнения (7). Таким образом, уравнение (7) имеет еще решения вида

$$y = xC + \varphi(C). \tag{13}$$

(Решение (13) определено для всех значений C, при которых определена функция $\varphi(C)$; решение (13) представляет собой функцию от x и $C \Rightarrow$ (13) — общее решение уравнения (7).)

Выясним еще, не имеет ли уравнение (7) решений, подозрительных на особое.

Для нахождения таких решений нужно (как это следует из §1) рассмотреть систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xy' + \varphi(y'), \\ 0 = x + \varphi'(y') \end{cases} \tag{14}$$

и исключить из нее y'.

Легко видеть, что результат исключения y' из системы (14) тождествен результату исключения параметра t из системы (11).

Вывод: решение (11) уравнения (7) подозрительно на особое решение этого уравнения.

§3. Примеры и задачи к главе 2

Задача 1. Найти все решения уравнения $(y')^2+xy=y^2+xy'$.

▶ Перепишем заданное уравнение в виде $(y')^2-xy'+(xy-$ $-y^2)=0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y'=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-xy+y^2}=\frac{x}{2}\pm\frac{\sqrt{(x-2y)^2}}{2}=\frac{x}{2}\pm\frac{x-2y}{2}.$$

Исходное уравнение распадается на два уравнения: $y'+y=x$ и $y'-y=0$. $\mu=e^{\int dx}=e^x(\neq 0)$ и $\mu=e^{-\int dx}=e^{-x}(\neq 0)$ — интегрирующие множители для первого и второго из этих уравнений соответственно. После умножения обеих частей полученных уравнений на соответствующие им интегрирующие множители получаем уравнения

$$e^xy'+e^xy=xe^x \text{ и } e^{-x}y'-e^{-x}y=0,$$

равносильные исходным. Последние могут быть записаны в виде

$$(e^xy)'_x=xe^x \text{ и } (e^{-x}y)'_x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^xy=xe^x-e^x+C \text{ и } e^{-x}y=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=x-1+Ce^{-x} \text{ и } y=Ce^x.$$

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в формулах $y=x-1+Ce^{-x}$; $y=Ce^x$. ◀

Задача 2. Найти все решения уравнения $xy'(xy'+y)=2y^2$.

▶ Перепишем заданное уравнение в виде $x^2(y')^2+xyy'-$ $-2y^2=0$ $\Rightarrow$ для $x\neq 0$ находим

$$y'=\frac{-xy\pm\sqrt{x^2y^2+8x^2y^2}}{2x^2}=\frac{-xy\pm 3xy}{2x^2}=\frac{-y\pm 3y}{2x}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в левой и правой открытых полуплоскостях $y'=-2\dfrac{y}{x}$ и $y'=\dfrac{y}{x}$, или $y'+\dfrac{2}{x}y=0$ и $y'-\dfrac{1}{x}y=0$. Из этих уравнений видно непосредственно, что $\begin{cases}y=0,\\-\infty<x<0\end{cases}$ и $\begin{cases}y=0,\\0<x<+\infty\end{cases}$ являются решениями каждого из полученных уравнений. Замечаем, что оба уравнения являются линейными. $\mu = x^2$ — интегрирующий множитель для первого из них, а $\mu = \frac{1}{x}$ — интегрирующий множитель для второго; у нас $x \neq 0$ в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty, \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ После умножения обеих частей полученных уравнений на соответствующие им интегрирующие множители получаем уравнения $x^2y' + 2xy = 0$ и $\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$. Последние могут быть записаны в виде $(x^2y)'_x = 0$ и $\left(\frac{y}{x}\right)'_x = 0 \Rightarrow x^2y = C$ и $\frac{y}{x} = C$ в (D_k), $k = 1, 2$.

Ответ. Все решения заданного уравнения в областях (D_k), $k = 1, 2$, содержатся в формулах $x^2y = C$ и $y = Cx$. ◀

Задача 3. Найти все решения уравнения $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$.

▶ Имеем для $x \neq 0$: $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$. Ясно, что должно быть $y^2 - x^2 \geq 0$. Легко проверить, что функции $\begin{cases} y = \pm x, \\ -\infty < x < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \pm x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ являются решениями полученного уравнения. Станем рассматривать уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$ и $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$ в областях:

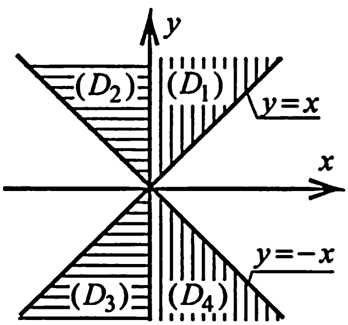

Рис. 2.8. К задаче 3

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ x < y < +\infty, \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty, \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < x, \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x. \end{cases}$$

Оба этих уравнения являются однородными. Делаем замену: $y = u \cdot x$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y' = xu' + u$. Относительно новой неизвестной функции полученные уравнения станут такими:

$$xu'_x = \sqrt{u^2 - 1} \text{ и } xu'_x = -\sqrt{u^2 - 1}. \qquad (*)$$

Отметим, что в каждой из областей (D_k), $k = \overline{1,4}$: $u^2 > 1$, $x \neq 0$. Следовательно, уравнения (*) равносильны соответственно уравнениям

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \text{ и } \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| = \ln|x| + \ln|C| \text{ и } \ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx \text{ и } u + \sqrt{u^2 - 1} = \frac{C}{x}.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2 \text{ и } y + \sqrt{y^2 - x^2} = C$$

в каждой (D_k), $k = \overline{1,4}$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; $y + \sqrt{y^2 - x^2} = C$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$, и $y = x$, $y = -x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 4. Найти все решения уравнения $x(y')^2 - 2yy' + y = 0$.

▶ Имеем для $x \neq 0$: $y' = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - xy}}{x}$. Ясно, что должно быть $y^2 - xy \geq 0$. Легко проверить, что функции

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

являются решениями полученного уравнения.

Станем рассматривать уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}, \quad y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$$

в областях:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\ x<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\ 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-\infty<x<0,\\ -\infty<y<x;\end{cases}$$

$$(D_4)=\begin{cases}0<x<+\infty,\\ -\infty<y<0.\end{cases}$$

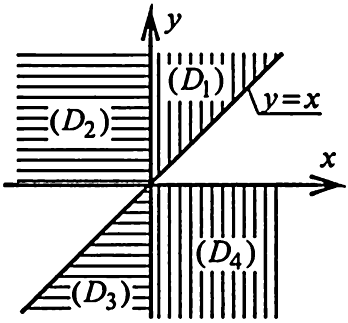

Рис. 2.9. К задаче 4

Оба эти уравнения являются однородными. Делаем замену: $y=ux$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y'=u'x+u$. Относительно новой неизвестной функции полученные уравнения станут такими:

$$xu'_x=\sqrt{u^2-u};\quad xu'_x=-\sqrt{u^2-u}. \qquad (*)$$

Отметим, что в каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$: $x\neq 0$ и $u^2-u>0$. Поэтому уравнения (*) равносильны соответственно уравнениям

$$\frac{du}{\sqrt{u^2-u}}=\frac{dx}{x}\ \text{и}\ \frac{du}{\sqrt{u^2-u}}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2-u}\right|=\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2-u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2-u}=Cx\ \text{и}\ u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2-u}=\frac{C}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{y^2-xy}=\frac{x}{2}+Cx^2\ \text{и}\ y+\sqrt{y^2-xy}-\frac{x}{2}=C,$$

в каждой (D_k), $k=\overline{1,4}$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$y+\sqrt{y^2-xy}=\frac{x}{2}+Cx^2;\ y+\sqrt{y^2-xy}-\frac{x}{2}=C \text{ в } (D_k),\ k=\overline{1,4};$$

$$y=0 \text{ и } y=x,\ x\in(-\infty,+\infty). ◀$$

Задача 5. Найти все решения уравнения $(y')^2+x-2y=0$.

▶ Имеем $y'=\pm\sqrt{2y-x}$. Ясно, что должно быть $2y-x\geq 0$, т. е. $y\geq\frac{x}{2}$. Станем рассматривать уравнения

$$y'=\sqrt{2y-x} \text{ и } y'=-\sqrt{2y-x}$$

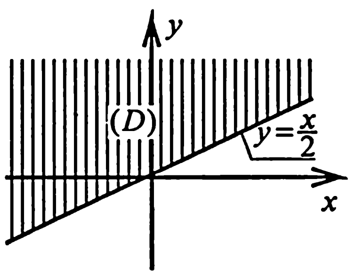

Рис. 2.10. К задаче 5

в области $(D)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ x/2<y<+\infty.\end{cases}$ Сделаем замену, положив $2y-x=u^2$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция). Ясно, что $u>0$ в (D). Получим $2y'-1=2uu' \Rightarrow y'=uu'+\frac{1}{2}$. Относительно новой неизвестной функции полученные уравнения станут такими:

$$uu'=u-\frac{1}{2} \text{ и } uu'=-u-\frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Эти уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Так как $u-\frac{1}{2}=0$ при $u=\frac{1}{2}$, а $-\left(u+\frac{1}{2}\right)\neq 0(<0)$ в (D), то из (*) находим

$$\frac{u}{u-\frac{1}{2}}du=dx \text{ (если } u\neq\frac{1}{2}) \text{ и } -\frac{u}{u+\frac{1}{2}}du=dx. \qquad (**)$$

Отметим, что $u=\frac{1}{2}$ является решением первого из уравнений (*) (это соответствует решению $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}$ исходного уравнения). Из уравнений (**) получаем соответственно

$$u+\frac{1}{2}\ln\left|u-\frac{1}{2}\right|=x+C \quad (\text{если } u\neq\frac{1}{2}) \text{ и } -u+\frac{1}{2}\ln\left|u+\frac{1}{2}\right|=x+C.$$

Возвращаясь к прежним переменным, находим

$$\sqrt{2y-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}-\sqrt{2y-x}\right|=x+C, \text{ если } y\neq\frac{x}{2}+\frac{1}{8},$$

и

$$-\sqrt{2y-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{2y-x}\right|=x+C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\sqrt{2y-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}-\sqrt{2y-x}\right|=x+C \text{ в } (D), \text{ где } y\neq\frac{x}{2}+\frac{1}{8};$$

$$-\sqrt{2y-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{2y-x}\right|=x+C \text{ в } (D);$$

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{8}, \quad x\in(-\infty,+\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 6. Найти все решения уравнения $(y')^3+(x+2)e^y=0$.

▶ Имеем $y'=-(x+2)^{1/3}e^{y/3}$. Это — уравнение с разделяющимися переменными. Так как $e^{y/3}\neq 0$, то получаем уравнение $e^{-y/3}dy+(x+2)^{1/3}dx=0$, равносильное исходному. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ -3e^{-y/3}+\frac{3}{4}(x+2)^{4/3} = \tilde{C} \Rightarrow 4e^{-\frac{y}{3}}=(x+2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формуле $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C$. ◀

Задача 7. Найти все решения уравнения $(y')^2-2xy'=8x^2$.

▶ Имеем $(y')^2-2xy'-8x^2=0 \Rightarrow y'=x\pm\sqrt{x^2+8x^2}=x\pm 3x$. Видим, что исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$y'=4x \text{ и } y'=-2x \Rightarrow y=2x^2+C \text{ и } y=-x^2+C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y=2x^2+C$ и $y=-x^2+C$. ◀

Задача 8. Найти все решения уравнения $(xy'+3y)^2=7x$.

▶ Из вида уравнения следует непосредственно, что должно быть $x \geq 0$. Имеем $xy'+3y=\pm\sqrt{7}\sqrt{x} \Rightarrow$ для $x>0$:

$$y'+\frac{3}{x}y=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{x}}. \qquad (*)$$

Полученные уравнения (*) являются линейными. Они равносильны исходному в открытой правой полуплоскости, т. е. при $x>0$.

$$\mu=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\int \frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3$$

— интегрирующий множитель для уравнений (*). Отметим, что $\mu \neq 0$ для $x>0$. После умножения обеих частей уравнений (*) на $\mu=x^3$ будем иметь

$$x^3y'+3x^2y=\pm\sqrt{7}x^{5/2} \Leftrightarrow (x^3y)'_x=\pm\sqrt{7}x^{5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3y=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}x^{7/2}+C \Rightarrow y=Cx^{-3}\pm\frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{x}.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $y=Cx^{-3}+2\sqrt{\frac{x}{7}}$ и $y=Cx^{-3}-2\sqrt{\frac{x}{7}}$, $x\in(0,+\infty)$. ◀

Задача 9. Найти все решения уравнения $(y')^2-2yy'=y^2(e^x-1)$.

▶ Имеем

$$(y')^2-2yy'+y^2=y^2e^x \Leftrightarrow (y'-y)^2=y^2e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'-y=\pm ye^{x/2} \Rightarrow y'=y\left(1\pm e^{x/2}\right).$$

Нетрудно видеть, что функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением полученных, а также и исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения $y'=y\left(1\pm e^{x/2}\right)$ для $y\neq 0$, т. е. в открытых верхней и нижней полуплоскостях. Эти уравнения в областях $(D_1)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ 0<y<+\infty\end{cases}$ и $(D_2)=\begin{cases}-\infty<x<+\infty,\\ -\infty<y<0\end{cases}$ равносильны уравнениям

$$\frac{y'}{y} = 1 + e^{x/2} \text{ и } \frac{y'}{y} = 1 - e^{x/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x + 2e^{x/2} + \ln|C| \text{ и } \ln|y| = x - 2e^{x/2} + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Ce^{x+2e^{x/2}} \text{ и } y = Ce^{x-2e^{x/2}}.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $y = Ce^{x+2e^{x/2}}$, $y = Ce^{x-2e^{x/2}}$ в $(D_1) \cup (D_2)$ и $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 10. Найти все решения уравнения $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

▶ Имеем

$$y'(2y - y') - y^2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow (y')^2 - 2yy' + y^2(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y' - y)^2 = y^2 \cos^2 x \Rightarrow y' - y = \pm y \cos x \Rightarrow y' = (1 \pm \cos x) y.$$

Легко видеть, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением полученных, а также и исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения

$$y' = (1 + \cos x) y \text{ и } y' = (1 - \cos x) y \qquad (*)$$

в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$ и $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$ Уравнения (*) в $(D_1) \cup (D_2)$ равносильны соответственно уравнениям

$$\frac{y'}{y} = 1 + \cos x \text{ и } \frac{y'}{y} = 1 - \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x + \sin x + \ln|C| \text{ и } \ln|y| = x - \sin x + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Ce^{x+\sin x} \text{ и } y = Ce^{x-\sin x}.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y = Ce^{x+\sin x}$, $y = Ce^{x-\sin x}$ в $(D_1) \cup (D_2)$ и $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 11. Найти все решения уравнения $(y')^4 + y^2 = y^4$.

▶ Видим непосредственно, что $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — решение исходного уравнения. Имеем, далее,

$$(y')^4 = y^2(y^2 - 1) \Rightarrow (y')^2 = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Ясно, что если $y \neq 0$, то должно быть $y^2 - 1 \geq 0$, т. е. должно быть: либо $y \in [1, +\infty)$, либо $y \in (-\infty, 1]$. Так как левая часть последнего соотношения неотрицательна, то для $y \in [1, +\infty)$: $(y')^2 = y\sqrt{y^2 - 1}$, а для $y \in (-\infty, 1]$: $(y')^2 = -y\sqrt{y^2 - 1}$. Замечаем, что функция $y = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением первого из полученных уравнений, а функция $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением второго из этих уравнений. Отметим, что обе эти функции являются решениями исходного уравнения.

Станем рассматривать уравнение $(y')^2 = y\sqrt{y^2 - 1}$ в области

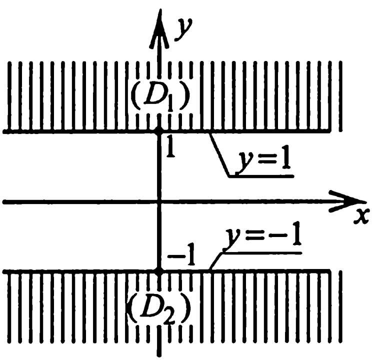

Рис. 2.11. К задаче 11

$(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 1 < y < +\infty, \end{cases}$ а уравнение $(y')^2 = -y\sqrt{y^2 - 1}$ в области $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < -1. \end{cases}$ В области (D_1) следует рассмотреть уравнения

$$y' = \pm\sqrt{y}(y^2 - 1)^{1/4}, \qquad (*)$$

а в области (D_2) — уравнения

$$y' = \pm\sqrt{-y}(y^2 - 1)^{1/4}. \qquad (**)$$

Заметим, что если в уравнениях (**) сделать замену $y = -\tilde{y}$, то относительно функции $\tilde{y}$ будем иметь уравнения $\tilde{y}' = \mp\sqrt{\tilde{y}}(\tilde{y}^2 - 1)^{1/4}$, где $\tilde{y} \in (1, +\infty)$. Видим, что для $\tilde{y}$ получены точно такие же уравнения, как и уравнения (*) для функции y. Следовательно, если будут найдены решения уравнений (*), то тем самым будут найдены и решения уравнений относительно $\tilde{y}$ (а значит, и решения уравнений (**)). В области (D_1) уравнения (*) равносильны уравнениям

$$\frac{dy}{\sqrt{y}(y^2 - 1)^{1/4}} = \pm dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{y} + \sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y} - \sqrt[4]{y^2 - 1}}\right| - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y}} = C \pm x.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{y}+\sqrt[4]{y^2-1}}{\sqrt{y}-\sqrt[4]{y^2-1}}\right|-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{y^2-1}}{\sqrt{y}}=C\pm x \text{ в области } (D_1),$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{-y}+\sqrt[4]{y^2-1}}{\sqrt{-y}-\sqrt[4]{y^2-1}}\right|-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{y^2-1}}{\sqrt{-y}}=C\pm x \text{ в области } (D_2),$$

$y=0, x\in(-\infty,+\infty)$; $y=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$; $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$. ◀

Задача 12. Найти все решения уравнения $x(y-xy')^2=x(y')^2-2yy'$.

▶ Непосредственно из заданного уравнения видно, что $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является его решением. Для $x\neq 0$ имеем:

$$(y-xy')^2=(y')^2-2y'\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow (y-xy')^2=\left(y'-\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-xy')^2=\frac{(xy'-y)^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow (xy'-y)^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\frac{y^2}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xy'-y)^2=\frac{y^2}{1-x^2}, \text{ если } x\neq\pm 1.$$

Левая часть последнего соотношения неотрицательна. Следовательно, неотрицательной должна быть и правая часть. А это будет лишь тогда, когда $x\in(-1,1)$.

Станем рассматривать полученное уравнение в областях:

$$(D_1)=\begin{cases}0<x<1,\\0<y<+\infty;\end{cases}\quad (D_2)=\begin{cases}-1<x<0,\\0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$(D_3)=\begin{cases}-1<x<0,\\-\infty<y<0;\end{cases}\quad (D_4)=\begin{cases}0<x<1,\\-\infty<y<0.\end{cases}$$

В каждой из областей (D_k), $k=\overline{1,4}$, будем иметь

$$xy'-y=\pm\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}\pm\frac{y}{x\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$$

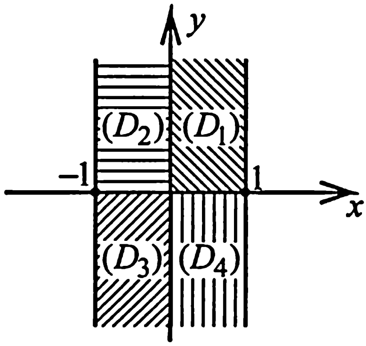

Рис. 2.12. К задаче 12

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| \mp$$

$$\mp \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1)\ Cy = \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow Cy = \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2} \Rightarrow$$

$$Cy = 1-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$(Cy-1)^2 + x^2 = 1\ ;\ 2)\ Cy = x\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow (Cy-1)^2 + x^2 = 1\,.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $(Cy-1)^2 + x^2 = 1$ в областях (D_k), $k=\overline{1,4}$, и $y=0$, $x \in (-\infty, \infty)$. ◀

Задача 13. Найти все решения уравнения $y(xy'-y)^2 = y - 2xy'$.

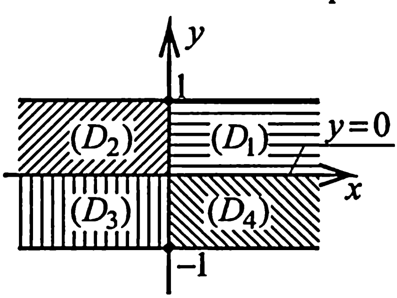

Рис. 2.13. К задаче 13

▶ Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y=0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Разрешая исходное уравнение относительно y', находим для $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$y' = \frac{y^2-1}{xy} \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{xy}. \qquad (*)$$

Из полученных уравнений видим, что должно быть $1-y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Замечаем, что функции $y=1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, и $y=-1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, являются решениями полученных, а также исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения (*) в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < 1; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < 1, \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -1 < y < 0, \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -1 < y < 0. \end{cases}$$

Из уравнений (*) находим

$$yy' = \frac{1}{x}\left(y^2 - 1 \pm \sqrt{1 - y^2}\right) \text{ в } (D_k),\ k = \overline{1, 4}.$$

Сделаем замену: $1 - y^2 = u^2$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u \neq 0$ для $y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$). Относительно функции $u(x)$ получаем уравнения

$$-uu'_x = \frac{1}{x}(-u^2 \pm u) \Rightarrow u'_x = \frac{1}{x}(u \pm 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1)\ \ln|u + 1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u + 1 = Cx \Rightarrow (Cx - 1)^2 = 1 - y^2;$$

$$2)\ \ln|u - 1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u - 1 = Cx \Rightarrow (Cx + 1)^2 = 1 - y^2.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$(Cx - 1)^2 + y^2 = 1,\ (Cx + 1)^2 + y^2 = 1 \text{ в областях } (D_k),\ k = \overline{1, 4};$$

$$y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$y = -1,\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);\ y = 1,\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). ◀$$

Задача 14. Найти все решения уравнения $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

▶ Сделаем замену, положив $y^2 = u$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u \geq 0$). Тогда $yy'_x = \frac{1}{2}u'_x$. Относительно новой неизвестной функции исходное уравнение станет таким:

$$(u')^2 - 4xu' + (8u - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u')^2 - 4xu' + 4x^2 + 8(u - x^2) = 0 \Leftrightarrow (2x - u')^2 + 8(u - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - u')^2 = 8(x^2 - u). \qquad (*)$$

Так как левая часть полученного уравнения неотрицательна, то неотрицательной должна быть и правая часть этого уравнения, т. е. должно быть $x^2 - u \geq 0 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq x^2$. Это неравенство выполняется в областях:

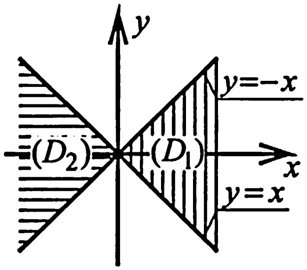

Рис. 2.14. К задаче 14

$$(\bar{D}_1) = \begin{cases} 0 \le x < +\infty, \\ -x \le y \le x; \end{cases}$$

$$(\bar{D}_2) = \begin{cases} -\infty \le x \le 0, \\ x \le y \le -x. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $u = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением уравнения (*) (а значит, функции $y = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $y = -x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются решениями исходного уравнения). Заметим, что в областях (D_k), $k = 1, 2$, $x^2 - u > 0$. Поэтому уравнение (*) может быть записано в виде

$$\frac{(2x-u')^2}{8(x^2-u)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2x-u')}{\sqrt{x^2-u}} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{(x^2-u)'}{2\sqrt{x^2-u}} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-u} = \pm\sqrt{2}x + C \Rightarrow \sqrt{x^2-y^2} = C \pm \sqrt{2}x.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\sqrt{x^2-y^2} = C \pm \sqrt{2}x \text{ в } (D_k),\ k = 1, 2;$$

$$y = -x,\ x \in (-\infty, +\infty);\ y = x,\ x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 15. Найти все решения уравнения $(y')^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

▶ Имеем

$$y' = -2x \pm \sqrt{4x^2 + y^2 + 2x^2y + x^4 - 4x^2} = -2x \pm \sqrt{(y+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' + 2x = \pm(y + x^2). \qquad (*)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y = -x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением полученных, а также исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения (*) для $y \ne -x^2$. Тогда уравнения (*) будут равносильны уравнениям

$$\frac{y'+2x}{y+x^2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{(y+x^2)'}{y+x^2} = \pm 1 \Rightarrow \ln|y+x^2| = \pm x + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + x^2 = Ce^{\pm x}. \qquad (**)$$

Отметим, что решение $y = -x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, содержится в соотношении (**) при $C = 0$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формуле $y = Ce^{\pm x} - x^2$. ◀

Задача 16. Найти все решения уравнения $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

▶ Из заданного уравнения видно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения. Разрешая исходное уравнение относительно y', находим для $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$y' = \frac{2xy^2 + 1 \pm \sqrt{4xy^2 + 1}}{4x^2 y}. \qquad (*)$$

Из полученных уравнений (*) заключаем, что должно быть

$$4xy^2 + 1 \geq 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, x \in (-\infty, 0),$$

и

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, x \in (-\infty, 0),$$

являются решениями уравнений (*), а также решениями исходного уравнения. Станем рассматривать уравнения (*) в областях:

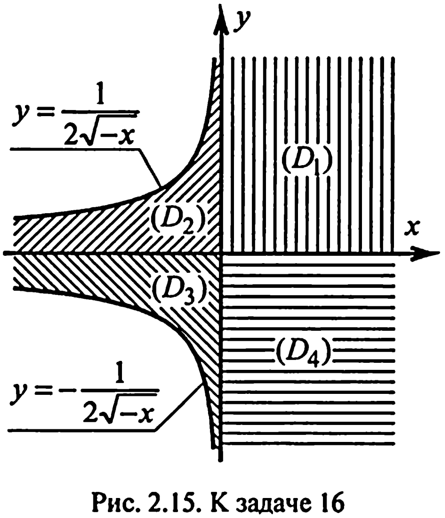

Рис. 2.15. К задаче 16

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения (*) в виде

$$4x^2yy' = 2xy^2 + 1 \pm \sqrt{4xy^2+1}. \qquad (**)$$

Сделаем замену, положив $u = 4xy^2 + 1$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u(x) > 0$ в (D_k), $k = \overline{1,4}$). При такой замене $u' = 4y^2 + 8xyy' \Rightarrow yy' = \dfrac{u' - 4y^2}{8x}$; $2xy^2 = \dfrac{u-1}{2}$. Относительно новой неизвестной функции уравнения (**) примут вид

$$u'x = 2\sqrt{u}\left(\sqrt{u} \pm 1\right) \Leftrightarrow \frac{du}{2\sqrt{u}\left(\sqrt{u} \pm 1\right)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\ln\left|\sqrt{u} \pm 1\right| = d\ln|x| \Rightarrow \ln\left|\sqrt{u} \pm 1\right| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{u} \pm 1 = Cx \Rightarrow \sqrt{u} = (Cx \mp 1) \Rightarrow \sqrt{4xy^2+1} = Cx \mp 1 \cdot$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах

$$\sqrt{4xy^2+1} = Cx \mp 1 \text{ в } (D_k),\ k = \overline{1,4};$$

$$y = \pm\frac{1}{2\sqrt{-x}},\ x \in (-\infty, 0);\ y = 0,\ x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 17. Методом введения параметра решить уравнение $x = (y')^3 + y'$.

▶ Полагаем $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда $x = t^3 + t \Rightarrow dx = (3t^2+1)dt$. У нас $dy = tdx$. Следовательно, $dy = t(3t^2+1)dt \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{t^2}{2} + C$.

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^2 + C \end{cases}$$ — общее решение исходного уравнения в параметрической форме.

1) Проверим, не имеет ли исходное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $x = a^3 + a$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Имеем

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-(y')^3-y'=0, \\ -3(y')^2-1=0 \Rightarrow (y')^2=-\dfrac{1}{3} \quad \text{(невозможно)}. \end{cases}$$

Следовательно, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x=t^3+t, \\ y=\dfrac{3}{4}t^4+\dfrac{1}{2}t^2+C. \end{cases} ◀$$

Задача 18. Найти все решения уравнения: $x\left((y')^2-1\right)=2y'$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения находим при $y'\neq\pm 1$

$$x=\frac{2y'}{(y')^2-1}.$$

Полагаем $y'=t$ ($\Leftrightarrow$ $dy=tdx$). Получаем

$$x=\frac{2t}{t^2-1}, \quad t\in(-\infty,\,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\,+\infty).$$

У нас $dy=tdx$. Следовательно,

$$dy=-\frac{2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2}dt \Leftrightarrow dy=-\frac{(t^2+1)d(t^2-1)}{(t^2-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dy=-\frac{\left[(t^2-1)+2\right]d(t^2-1)}{(t^2-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy=-\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}-2\frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)^2} \Rightarrow y=-\ln\left|t^2-1\right|+\frac{2}{t^2-1}+C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x=\dfrac{2t}{t^2-1}, \\ y=\dfrac{2}{t^2-1}-\ln\left|t^2-1\right|+C, \end{cases} \quad t\in(-\infty,\,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\,+\infty).$$

Это — общее решение заданного уравнения в параметрической форме.

1) Проверим, не имеет ли исходное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $x(a^2 - 1) = 2a$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого вводим в рассмотрение систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left((y')^2 - 1\right) - 2y' = 0, \\ 2xy' - 2 = 0 \quad (\text{невозможно, если } x = 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0; \\ x\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) - \dfrac{2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0; \\ -\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{невозможно}). \end{cases}$$

Следовательно, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{2}{t^2 - 1} - \ln\left|t^2 - 1\right| + C, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 19. Найти все решения уравнения $x = y'\sqrt{1 + (y')^2}$ (методом введения параметра).

▶ Полагаем $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда $x = t\sqrt{1 + t^2}$. У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$dy = t\left(\sqrt{1 + t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}\right)dt = t\left(\sqrt{1 + t^2} + \frac{(t^2 + 1) - 1}{\sqrt{1 + t^2}}\right)dt =$$

$$= t\left(2\sqrt{1 + t^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{1 + t^2}\,d(1 + t^2) - \frac{1}{2}\frac{d(1 + t^2)}{\sqrt{1 + t^2}} \Rightarrow y = \frac{2}{3}(1 + t^2)^{3/2} - \sqrt{1 + t^2} + C.$$

Получили, таким образом,

$$\begin{cases} x = t\sqrt{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2}{3}(1+t^2)^{3/2} - \sqrt{1+t^2} + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $x = a\sqrt{1+a^2}$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое? Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y'\sqrt{1+(y')^2} = 0, \\ -\sqrt{1+(y')^2} - \dfrac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \Rightarrow 1 + 2(y')^2 = 0 \quad \text{(невозможно)}. \end{cases}$$

Значит, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = t\sqrt{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2}{3}(1+t^2)^{3/2} - \sqrt{1+t^2} + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 20. Найти все решения уравнения $y'(x - \ln y') = 1$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения следует, что должно быть $y' > 0$. Положим $y' = t$ ($t > 0$). Тогда $x = \ln t + \dfrac{1}{t}$. У нас $dy = t dx$. Поэтому

$$dy = t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = dt - \frac{dt}{t} \Rightarrow y = t - \ln t + C$$

(у нас $t > 0$). Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \ln t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \ln t + C, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $a(x - \ln a) = 1$. Видим, что тождественного равенства нет. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью составим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x - \ln y') - 1 = 0, \\ x - \ln y' - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = 1, \text{ а значит, } x = 1.$$

$x = 1$ — не есть решение исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений, подозрительных на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \ln t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \ln t + C, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 21. Найти все решения уравнения $y = (y')^2 + 2(y')^3$ (методом введения параметра).

$\blacktriangleright$ Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Тогда

$$y = t^2 + 2t^3 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $dy = (2t + 6t^2)dt$. У нас $dy = tdx$. Будем иметь, следовательно,

$$tdx = 2t(1 + 3t)dt. \qquad (**)$$

Замечаем, что если $t = 0$, то из (*): $y = 0$. Непосредственной подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \neq 0$, из соотношения (**), получаем

$$dx = 2(1 + 3t)dt \Rightarrow x = 2t + 3t^2 + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + C, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$ax + b = a^2 + 2a^3 \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Получаем, что $y \equiv 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения (это было отмечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этой цели рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^2 + 2(y')^3 - y = 0, \\ 2y' + 6(y')^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{27}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением, а функция $y = \dfrac{1}{27}$, $x = (-\infty, +\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решение $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, подозрительно на особое.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + C, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 22. Найти все решения уравнения $y = \ln\left(1 + (y')^2\right)$ (методом введения параметра).

▶ Положим $y' = t$ ($dy = tdx$). Тогда

$$y = \ln(1 + t^2), \quad t \in (-\infty, +\infty) \tag{*}$$

$\Rightarrow dy = \dfrac{2tdt}{1 + t^2}$. У нас $dy = tdx$. Следовательно, будем иметь

$$tdx = \frac{2tdt}{1 + t^2}. \tag{**}$$

Замечаем, что если $t = 0$, то из (*): $y = 0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \neq 0$ из соотношения (**) находим

$$dx = 2\frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\, t + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\, t + C, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$ax + b = \ln(1+a^2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = \ln(1+a^2) \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Значит, функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln\left(1+(y')^2\right) - y = 0, \\ \dfrac{2y'}{1+(y')^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, — решение исходного уравнения, подозрительное на особое.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\, t + C, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 23. Найти все решения уравнения $(y'+1)^3 = (y'-y)^2$ (методом введения параметра).

$\blacktriangleright$ Из вида заданного уравнения следует, что должно быть $y' \geq -1$ и что

$$y' - y = \pm(y'+1)^{3/2} \Rightarrow y = y' \mp (y'+1)^{3/2}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$), $t \geq -1$. Тогда

$$y = t \mp (t+1)^{3/2}, \quad t \geq -1. \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $dy = \left(1 \mp \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\right)dt$. У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \left(1 \mp \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\right)dt. \qquad (**)$$

Если $t = 0$, то из (*) следует, что $y = \mp 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функции $y = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются его решениями. Для $t \neq 0$ из (**) находим

$$dx = \left(\frac{1}{t} \mp \frac{3}{2}\frac{\sqrt{t+1}}{t}\right)dt \Rightarrow x = \ln|t| \mp 3\sqrt{t+1} \mp \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \ln|t| \mp 3\sqrt{t+1} \mp \dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right| + C, \\ y = t \mp (t+1)^{3/2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$(a+1)^3 = (a - ax - b)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2a(b-a) = 0, \\ x^0 & (b-a)^2 = (a+1)^3, \end{array} \qquad a = 0;\ b = \pm 1.$$

Значит, функции $y = +1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются решениями исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y'+1)^3 - (y'-y)^2 = 0, \\ 3(y'+1)^2 - 2(y'-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(y'+1)^3=(y'-y)^2,\\ \dfrac{y'+1}{3}=\dfrac{y'-y}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y'=3y+2,\\ (3y+3)^3=(2y+2)^2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27(y+1)^3=4(y+1)^2 \Rightarrow y=-1 \text{ и } y=-\frac{23}{27}.$$

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением, а $y=-\frac{23}{27}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решение $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, подозрительно на особое. ◀

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases}x=\ln|t|\mp 3\sqrt{t+1}\mp\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right|+C,\\ y=t\mp(t+1)^{3/2},\end{cases} \quad t\in[-1,0)\cup(0,+\infty);$$

$$y=-1,\ x\in(-\infty,+\infty);\ y=1, x\in(-\infty,+\infty).$$ ◀

Задача 24. Найти все решения уравнения $y=(y'-1)e^{y'}$ (методом введения параметра).

▶ Положим $y'=t$ ($\Leftrightarrow$ $dy=tdx$). Тогда

$$y=(t-1)e^t. \tag{*}$$

$\Rightarrow$ $dy=te^t dt$. У нас $dy=tdx$. Поэтому

$$tdx=te^t dt. \tag{**}$$

Если $t=0$, то из (*) следует, что $y=-1$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y=-1$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является его решением. Для $t\neq 0$ из (**) находим $dx=e^t dt$ $\Rightarrow$ $x=e^t+C$. Таким образом, получили

$$\begin{cases}x=e^t+C,\\ y=(t-1)e^t,\end{cases} \quad t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y=ax+b$. Подстановка функции $y=ax+b$ в заданное уравнение дает

$$ax+b=(a-1)e^a.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, находим

$$\left.\begin{array}{c|c} x & a=0 \\ x^0 & b=(a-1)e^a \end{array}\right\} \Rightarrow a=0,\, b=-1.$$

Функция $y=-1$, $x\in(-\infty,\,+\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y'-1)e^{y'}-y=0, \\ y'e^{y'}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'=0, \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция $y=-1$, $x\in(-\infty,\,+\infty)$, является решением исходного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x=e^t+C, \\ y=(t-1)e^t, \end{cases} \quad t\in(-\infty,0)\cup(0,\,+\infty), \text{ и } y=-1, \quad x\in(-\infty,\,+\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 25. Найти все решения уравнения $(y')^4-(y')^2=y^2$ (методом введения параметра).

▶ Положим $y'=t$ ($dy=tdx$). Тогда $y^2=t^4-t^2 \Rightarrow$ $y^2=t^2(t^2-1)$. Ясно, что должно быть $|t|\ge 1$ и $t=0$, т. е. $t\in(-\infty,\,-1]\cup[1,\,+\infty)$ и $t=0$. Итак, имеем

$$y=\pm t\sqrt{t^2-1}. \qquad (*)$$

Для $t\in(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$: $dy=\pm\left[\sqrt{t^2-1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\right]dt$. У нас $dy=tdx$. Поэтому

$$tdx=\pm\left[\sqrt{t^2-1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\right]dt. \qquad (**)$$

Замечаем, что если $t=0$, то из (*) следует $y=0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y=0$,

$x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ из (**) находим

$$dx = \pm\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\left(\sqrt{t^2-1} + \sqrt{t^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}\right) + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm\left(2\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}\right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{t^2-1}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^4 - a^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2ab = 0, \\ x^0 & b^2 = a^2(a^2-1) \end{array} \quad \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^4 + (y')^2 - y^2 = 0, \\ 4(y')^3 - 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ y^2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{(невозможно).}$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \pm\left(2\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}\right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{t^2-1}, \end{cases} \quad t \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty).$$

$$\text{и } y = 0, x \in (-\infty,\ +\infty). ◀$$

Задача 26. Найти все решения уравнения $(y')^2 - (y')^3 = y^2$ (методом введения параметра).

▶ Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Тогда $y^2 = t^2 - t^3 = t^2(1-t)$. Ясно, что должно быть $t \le 1$, т. е. $t \in (-\infty, 1]$ $\Rightarrow$

$$y = \pm t\sqrt{1-t}, \tag{*}$$

$t \in (-\infty, 1]$, $\Rightarrow$ для $t \in (-\infty, 1)$:

$$dy = \pm\left(\sqrt{1-t} - \frac{t}{2\sqrt{1-t}}\right)dt.$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \pm\left(\sqrt{1-t} - \frac{t}{2\sqrt{1-t}}\right)dt. \tag{**}$$

Если $t = 0$ или $t = 1$, то из (*) следует $y = 0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty,\ +\infty)$, является решением этого уравнения. Для $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ находим из (**)

$$dx = \pm\left(\frac{\sqrt{1-t}}{t} - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\left(\sqrt{1-t} + 2\sqrt{1-t} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right|\right) + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm\left(3\sqrt{1-t} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right|\right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{1-t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$a^2 - a^3 = a^2x^2 + 2abx + b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

$$\begin{array}{c|c} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2ab = 0, \quad \Rightarrow a = 0, b = 0. \\ x^0 & b^2 = a^2 - a^3 \end{array}$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^2 - (y')^3 - y^2 = 0, \\ 2y' - 3(y')^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = \dfrac{2}{3}, \\ y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функции $y = \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не являются решениями, а функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (решение $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ подозрительно на особое).

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \pm\left(3\sqrt{1-t} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1}\right|\right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{1-t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1),$$

$$\text{и } y = 0, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 27. Найти все решения уравнения $(y')^4 = 2yy' + y^2$ (методом введения параметра).

$\blacktriangleright$ Имеем $y^2 + 2yy' - (y')^4 = 0 \Rightarrow y = -y' \pm \sqrt{(y')^2 + (y')^4}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y=-t\pm t\sqrt{1+t^2},\quad t\in(-\infty,\ +\infty). \qquad (*)$$

$\Rightarrow\ dy=\left[-1\pm\left(\sqrt{1+t^2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]dt$. У нас $dy=tdx$. А тогда для $t\neq 0$

$$dx=\left[-\frac{1}{t}\pm\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\ln|t|\pm\left(\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}\right|\right)+C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases}x=-\ln|t|\pm\left(2\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}\right|\right)+C,\\ y=-t\pm t\sqrt{1+t^2},\end{cases}\qquad t\in(-\infty,0)\cup(0,\ +\infty).$$

При $t=0$ получаем из (*): $y=0$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$. Подстановкой в исходное уравнение функции $y=0$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$, убеждаемся, что эта функция является решением заданного уравнения.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y=ax+b$. Подстановка функции $y=ax+b$ в исходное уравнение дает

$$a^4=2a^2x+2ab+a^2x^2+2abx+b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2=0,\\ x & 2a(a+b)=0,\ \Rightarrow a=0,\ b=0.\\ x^0 & a^4=b(2a+b)\end{array}$$

Значит, функция $y=0$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+2yy'-(y')^4=0, \\ 2y-4(y')^3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исключая y', находим $y=0$ и $\sqrt[3]{y^2}=-\dfrac{3}{2^{4/3}}$ (невозможно). Значит, функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x=-\ln|t|\pm\left(2\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}\right|\right)+C, \\ y=-t\pm t\sqrt{1+t^2}, \end{cases} \quad t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

и $y=0, x\in(-\infty,+\infty)$. ◀

Задача 28. Найти все решения уравнения: $(y')^2-2xy'=x^2-4y$ (методом введения параметра).

▶ Имеем $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{xy'}{2}-\dfrac{(y')^2}{4}$. Положим $y'=t$ ($\Leftrightarrow dy=tdx$). Тогда

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{xt}{2}-\frac{t^2}{4}. \qquad (*)$$

У нас $dy=tdx$. Поэтому

$$tdx=\frac{x}{2}dx+\frac{t}{2}dx+\frac{x}{2}dt-\frac{t}{2}dt \Rightarrow \left(\frac{x}{2}-\frac{t}{2}\right)dx+\left(\frac{x}{2}-\frac{t}{2}\right)dt=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-t)(dx+dt)=0 \Rightarrow x-t=0 \text{ и } d(x+t)=0 \Rightarrow x=t \text{ и } x+t=C$$

$$\alpha)\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{xt}{2}-\dfrac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{x^2}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\beta)\begin{cases} x+t=C, \\ y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{xt}{2}-\dfrac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{x^2}{2}+Cx-\frac{1}{4}C^2,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^2 - 2ax = x^2 - 4(ax + b) \text{ (невозможно).}$$

Значит, заданное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{xy'}{2} - \dfrac{(y')^2}{4}, \\ 0 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y'}{2}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y = \dfrac{x^2}{2}$. Значит, функция $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$y = -\frac{x^2}{2} + Cx - \frac{1}{4}C^2, x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } y = \frac{x^2}{2}, x \in (-\infty, +\infty). ◀$$

Задача 29. Найти все решения уравнения $5y + (y')^2 = x(x + y')$ (методом введения параметра).

▶ Имеем $y = \frac{1}{5}\left[x(x + y') - (y')^2\right]$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Тогда

$$y = \frac{1}{5}\left[x(x + t) - t^2\right]. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$tdx = \frac{1}{5}[(x + t)dx + x(dx + dt) - 2tdt] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2t - x)dt + (4t - 2x)dx = 0 \Rightarrow (2t - x)(dt + 2dx) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t - x = 0 \text{ и } d(t + 2x) = 0 \Rightarrow x = 2t \text{ и } 2x + t = C.$$

$$\alpha)\ \begin{cases} x = 2t, \\ y = \frac{1}{5}\left[x(x+t) - t^2\right] \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\beta)\ \begin{cases} 2x + t = C, \\ y = \frac{1}{5}\left[x(x+t) - t^2\right] \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + Cx - \frac{C^2}{5},\ \ x \in (-\infty, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$5(ax+b) + a^2 = x(x+a) \ \text{(невозможно)}.$$

Значит, заданное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое? С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y + (y')^2 = x(x+y'), \\ 2y' = x. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y = \dfrac{x^2}{4}$. Значит, функция $y = \dfrac{x^2}{4}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$y = -x^2 + Cx - \frac{C^2}{5}, x \in (-\infty, +\infty),\ \text{и}\ \ y = \frac{x^2}{4}, x \in (-\infty, +\infty). ◀$$

Задача 30. Найти все решения уравнения $x^2(y')^2 = xyy' + 1$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения видно, что $x \neq 0$ и $y' \neq 0$. А тогда

$$y = \frac{x^2(y')^2 - 1}{xy'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$), $t \neq 0$. Тогда $y = \dfrac{x^2t^2 - 1}{xt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = xt - \frac{1}{xt}. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$tdx = tdx + xdt + \frac{xdt + tdx}{x^2t^2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{xt^2}\right)dt + \frac{1}{x^2t}dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2t^2+1}{t}dt + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -x^3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}x'_t + \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x^2} = -t. \qquad (**)$$

Положим $\frac{1}{x^2} = u$ ($u(t)$ — новая неизвестная функция) $\Rightarrow -2\frac{x'_t}{x^3} = u'_t$. Относительно новой неизвестной функции уравнение (**) станет таким: $-\frac{u'_t}{2} + \frac{u}{t} = -t \Rightarrow u'_t - \frac{2}{t}u = 2t$. Полученное уравнение является линейным. Для него интегрирующим множителем будет, например, функция $\mu = \frac{1}{t^2}$. После умножения обеих частей последнего уравнения на μ будем иметь

$$\frac{u'_t}{t^2} - \frac{2}{t^3}u = \frac{2}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{t^2}\right)'_t = 2\left(\ln|t|\right)' \Rightarrow \frac{u}{t^2} = \ln t^2 + C.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\frac{1}{x^2t^2} = \ln t^2 + C \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2(C + \ln t^2)}.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{t\sqrt{C+\ln t^2}}, \\ y = xt - \dfrac{1}{xt}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$x^2a^2 = ax(ax+b) = 1.$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2 = a^2, \\ x & ab = 0, \\ x^0 & 1 = 0 \quad \text{(невозможно).} \end{array}$$

Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(y')^2 = xyy' + 1, \\ 2x^2 y' = xy. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', получаем $\dfrac{y^2}{4} = -1$ (невозможно). Значит, заданное уравнение не имеет решений, подозрительных на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношении

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{1}{t\sqrt{C + \ln t^2}}, \\ y = \pm \left(\dfrac{1}{\sqrt{C + \ln t^2}} - \sqrt{C + \ln t^2} \right), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 31. Найти все решения уравнения $(y')^3 + y^2 = xyy'$ (методом введения параметра).

$\blacktriangleright$ Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. (Заметим, что $y = \mathrm{const} \neq 0$ не является решением исходного уравнения.) Из заданного уравнения имеем для $y \neq 0$:

$$x = \frac{(y')^2}{y} + \frac{y}{y'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Будем иметь для $t \neq 0$

$$x = \frac{t^2}{y} + \frac{y}{t}. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$dy = t\left(\frac{2t}{y}dt - \frac{t^2}{y^2}dy + \frac{1}{t}dy - \frac{y}{t^2}dt \right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}y = -\frac{y^3}{t^4} \Rightarrow$$

(это — уравнение Бернулли)

$$\Rightarrow \frac{y'_t}{y^3}-\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{y^2}=-\frac{1}{t^4}. \qquad (**)$$

Положим $\frac{1}{y^2}=u$ ($u(t)$ — новая неизвестная функция). Относительно новой неизвестной функции уравнение (**) будет таким:

$$u'_t+\frac{4}{t}u=\frac{2}{t^4}$$

(это — линейное уравнение). Для него интегрирующим множителем является, например, функция $\mu=t^4$. После умножения обеих частей последнего уравнения на $\mu=t^4$ получим

$$u'_t t^4+4t^3u=2 \Rightarrow (ut^4)'_t=2 \Rightarrow ut^4=2t+C.$$

У нас $u=\frac{1}{y^2}$. Поэтому будем иметь $y^2=\frac{t^4}{2t+C}$. Таким образом, получили

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{y}+\dfrac{y}{t}, \\ y^2(2t+C)=t^4, \end{cases} \qquad t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y=ax+b$. Подстановка функции $y=ax+b$ в исходное уравнение дает

$$a^3+(ax+b)^2=ax(ax+b).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2=a^2, \\ x & 2ab=ab, \quad \Rightarrow a=0, b=0. \\ x^0 & a^3+b^2=0 \end{array}$$

Значит, функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением заданного уравнения (это было замечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^3 + y^2 = xyy', \\ 3(y')^2 = xy. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y = 0$ и $y = \frac{4}{27}x^3$. Непосредственной подстановкой функций $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = \frac{4}{27}x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, в заданное уравнение убеждаемся, что $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением, а функция $y = \frac{4}{27}x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решение $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — подозрительное на особое решение исходного уравнения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{y} + \frac{y}{t}, \\ y^2(2t + C) = t^4, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, \; x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 32. Найти все решения уравнения $2xy' - y = y' \ln yy'$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения следует, что должно быть $yy' > 0$. Так как $y' \neq 0$, то находим $x = \frac{y}{2y'} + \frac{\ln yy'}{2}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$), $t \neq 0$. Тогда

$$x = \frac{y}{2t} + \frac{\ln yt}{2} \qquad (*)$$

(должно быть $yt > 0$). У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t\left(\frac{1}{2t}dy - \frac{y}{2}\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\frac{dt}{t}\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{y}\right)dy = \left(1 - \frac{y}{t}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-t}{y}dy+\frac{y-t}{t}dt=0 \Rightarrow (y-t)\left(\frac{dy}{y}+\frac{dt}{t}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\alpha)\begin{cases} y=t, \\ x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln y^2; \end{cases} \quad \beta)\begin{cases} yt=C \\ x=\frac{y^2}{2C}+\frac{1}{2}\ln C \end{cases}$$

Заметим, что решение α) представимо в виде $y=\pm\frac{e^x}{\sqrt{e}}$.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y=ax+b$. Подстановка функции $y=ax+b$ в исходное уравнение дает

$$2ax-(ax+b)=a\ln\,[(ax+b)a]$$

(такое тождество невозможно). Значит, заданное уравнение решений вида $y=ax+b$ не имеет.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy'-y=y'\ln yy', \\ 2x=\ln yy'+1. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y^2=e^{2x-1} \Rightarrow y=\pm\frac{e^x}{\sqrt{e}}$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функции $y=\pm\frac{e^x}{\sqrt{e}}$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$, являются решениями заданного уравнения. Эти решения — подозрительные на особые решения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях $y^2=2cx-c\ln c$; $y=\pm\frac{e^x}{\sqrt{e}}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. ◀

Задача 33. Найти все решения уравнения $y'=e^{\frac{xy'}{y}}$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения следует, что должно быть $y \neq 0$, а $y' > 0$. Прологарифмировав обе части исходного уравнения, находим

$$\frac{xy'}{y} = \ln y' \Rightarrow x = \frac{y \ln y'}{y'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$), $t > 0$. Тогда

$$x = \frac{y \ln t}{t}, \quad t \in (0, +\infty). \tag{*}$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t\left(\frac{\ln t}{t} dy - y\frac{\ln t}{t^2} dt + \frac{y}{t^2} dt\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \ln t)dy - \frac{y}{t}(1 - \ln t)dt = 0 \Rightarrow (1 - \ln t)\left(dy - \frac{y}{t}dt\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha) \begin{cases} 1 - \ln t = 0, \\ x = y\dfrac{\ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{e};$$

$$\beta) \begin{cases} dy - \dfrac{y}{t} dt = 0, \\ x = \dfrac{y \ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = Ct, \\ x = \dfrac{y \ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow x = C \ln \frac{y}{C}.$$

Таким образом, получили $y = ex$ и $x = C \ln \dfrac{y}{C}$.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a = e^{\frac{ax}{ax+b}} \Rightarrow \frac{ax}{ax+b} = \ln a \Rightarrow ax = (ax + b)\ln a.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x & a = a \ln a, \\ x^0 & b \ln a = 0 \end{array} \Rightarrow a = e, b = 0.$$

Значит, $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, — решение исходного уравнения ($x \neq 0$, так как должно быть $y \neq 0$).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = e^{\frac{xy'}{y}}, \\ 1 = e^{\frac{xy'}{y}} \cdot \dfrac{x}{y}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $\dfrac{y}{x} = e \Rightarrow y = ex$. Значит, решение $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, заданного уравнения подозрительно на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в формулах $x = C\ln\dfrac{y}{C}$ ($y \neq 0$); $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ◀.

Задача 34. Найти все решения уравнения $y = xy' - x^2(y')^3$ (методом введения параметра).

▶ Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = xt - x^2t^3. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$tdx = tdx + xdt - 2xt^3dx - 3x^2t^2dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(1 - 3xt^2)dt = 2xt^3dx \Rightarrow \text{ для } x \neq 0 \text{ и } t \neq 0: \ \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2t}x = \frac{1}{2t^3}.$$

Это линейное уравнение. Для него $\mu = t^{3/2}$ является интегрирующим множителем. Умножим обе части последнего уравнения на $\mu = t^{3/2}$. Получаем

$$x'_t t^{3/2} + \frac{3}{2}t^{1/2}x = \frac{1}{2}t^{-3/2} \Leftrightarrow (xt^{3/2})'_t = \frac{1}{2}t^{-3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xt^{3/2} = -t^{-1/2} + C \Rightarrow x = Ct^{-3/2} - \frac{1}{t^2}.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} xt^2 = C\sqrt{t} - 1, \\ y = xt - x^2t^3, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$ax + b = ax - x^2 a^3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -a^3 = 0, \\ x & \quad a = a, \quad \Rightarrow a = 0, b = 0. \\ x^0 & \quad b = 0 \end{array}$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xy' - x^2 (y')^3, \\ 0 = x - 3x^2 (y')^2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', получим $y = \pm \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = \pm \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{x}$ не есть решения заданного уравнения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} xt^2 = C\sqrt{t} - 1, \\ y = xt - x^2 t^3, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty); y = 0, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 35. Найти все решения уравнения $y = 2xy' + y^2 (y')^3$ (методом введения параметра).

$\blacktriangleright$ Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением, а $y = \text{const} \neq 0$ решением исходного уравнения не является.

Станем рассматривать заданное уравнение для $y \neq 0$ и $y' \neq 0$.

Имеем для $y' \neq 0$: $x = \dfrac{y}{2y'} - \dfrac{y^2 (y')^2}{2}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$).

Тогда для $t \neq 0$:

$$x=\frac{y}{2t}-\frac{y^2t^2}{2}. \qquad (*)$$

У нас $dy=tdx$. Следовательно,

$$dy=t\left(\frac{1}{2t}dy-\frac{y}{2t^2}dt-yt^2dy-ty^2dt\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}+yt^3\right)dy+\left(\frac{1}{2}+yt^3\right)\frac{y}{t}dt=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+yt^3\right)\left(\frac{dy}{y}+\frac{dt}{t}\right)=0$$

$$\Rightarrow \alpha)\begin{cases}\dfrac{1}{2}+yt^3=0\\ x=\dfrac{y}{2t}-\dfrac{y^2t^2}{2}\end{cases}\Rightarrow 32x^3=-27y^4,\ x\in(-\infty,0)$$

$$\beta)\begin{cases}\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dt}{t}=0\\ x=\dfrac{y}{2t}-\dfrac{y^2t^2}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}yt=C\\ x=\dfrac{y}{2t}-\dfrac{y^2t^2}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{y^2}{2C}-\frac{C^2}{2}.$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y=ax+b$. Подстановка функции $y=ax+b$ в исходное уравнение дает

$$ax+b=2xa+(ax+b)^2a^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $a=0$, и $b=0$. Следовательно, функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением заданного уравнения (это было замечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases}F(x,y,y')=0,\\ F'_{y'}(x,y,y')=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xy'+y^2(y')^3-y=0,\\ 2x+3y^2(y')^2=0.\end{cases}$$

Исключая из этой системы y', получим $27y^4=-32x^3$, $x\in(-\infty,0)$.

Выше (см. пункт α)) было показано, что функция, определяемая этим соотношением, является решением заданного уравнения. Выясним, не будет ли оно особым решением.

У нас (см. пункт β)) общее решение заданного уравнения определяется соотношением

$$x-\frac{y^2}{2C}+\frac{C^2}{2}=0 \qquad [F(x,y,C)=0]$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F'_C(x,y,C)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\dfrac{y^2}{2C}+\dfrac{C^2}{2}=0 \\ \dfrac{y^2}{2C^2}+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}C^2 \\ y^2=-2C^3 \end{cases} \qquad (*)$$

(*) — параметрические уравнения дискриминантной кривой. Если в системе (*) исключить параметр "C", то получим

$$32x^3=-27y^4. \qquad (**)$$

Следовательно, исследуемое решение исходного уравнения является дискриминантной кривой семейства интегральных кривых

$$x-\frac{y^2}{2C}+\frac{C^2}{2}=0 \qquad [F(x,y,C)=0]$$

В точках кривой (*) имеем: $(F'_x)^2+(F'_y)^2=1+\dfrac{y^2}{C^2}\neq 0$

Кроме того $F''_{C^2}=2+1=3\neq 0$.

Вывод. Решение, определяемое уравнением (**) является огибающей семейства интегральных кривых исходного уравнения. Значит оно является особым решением этого уравнения.

Задача 36. Найти все решения уравнения $y(y-2xy')^3=(y')^2$ (методом введения параметра).

▶ Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$ является его решением и что $y\equiv \text{const}\neq 0$ не является решением этого уравнения ($\Rightarrow$ $y'\not\equiv 0$ для $y\neq 0$).

Имеем $(y-2xy')^3=\dfrac{(y')^2}{y}$, для $y\neq 0 \Rightarrow$ $y-2xy'=\dfrac{(y')^{2/3}}{y^{1/3}} \Rightarrow$

$x=\dfrac{y}{2y'}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(yy')^{1/3}}$. Положим $y'=t$ ($\Leftrightarrow$ $dy=tdx$, $t\neq 0$). Тогда

$$x=\frac{y}{2t}-\frac{1}{2}\frac{1}{(yt)^{1/3}}. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t\left[\frac{1}{2t}dy - \frac{y}{2t^2}dt + \frac{1}{6}(yt)^{-4/3}(ydt + tdy)\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{3y^{4/3} - t^{2/3}}{6ty^{1/3}}dt + \frac{3y^{4/3} - t^{2/3}}{6y^{4/3}}dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ в } (D_k),\, k = \overline{1,4},\ \frac{dt}{t} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{C}{t}.$$

Получили, таким образом,

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(yt)^{1/3}}, \\ y = \dfrac{C}{t} \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2Cx + C^{2/3}.$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$(ax + b)(ax + b - 2ax)^3 = a^2 \Leftrightarrow (ax + b)(b - ax)^3 = a^2 \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ -6xy(y - 2xy')^2 = 2y' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ y(y - 2xy') = -3xyy' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ y' = -\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y=0$ и $27x^2y^2=1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$, и функции, определяемые соотношением $27x^2y^2=1$, являются решениями заданного уравнения. Они являются подозрительными на особые решения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$y^2=2Cx+C^{2/3};\, y=0,\, x\in(-\infty,\,+\infty);\, 27x^2y^2=1. \blacktriangleleft$$

§4. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских кривых

1°. Некоторые предварительные сведения. Плоские кривые будем задавать либо параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(\alpha), \\ y=\psi(\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

(α — параметр), либо уравнением вида

$$F(x,y)=0. \tag{2}$$

Введем понятия обыкновенной и особой точек кривой.

а) Пусть кривая (L) определяется параметрическими уравнениями (1). Пусть функции $x=\varphi(\alpha)$, $y=\psi(\alpha)$ имеют в точке α_0 непрерывные производные $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ и пусть $\varphi(\alpha_0)=x_0$, $\psi(\alpha_0)=y_0$. (Отметим, что точка $M_0(x_0,y_0)\in(L)$.) Точку $M(x_0,y_0)$ будем называть *обыкновенной* точкой кривой (L), если

$$(\varphi'(\alpha_0))^2+(\psi'(\alpha_0))^2\neq 0 \tag{3}$$

(т. е. если $\varphi'(\alpha_0)$ и $\psi'(\alpha_0)$ не обращаются в нуль одновременно). Если же

$$(\varphi'(\alpha_0))^2+(\psi'(\alpha_0))^2=0, \tag{4}$$

то точку $M_0(x_0,y_0)$ будем называть *особой* точкой (L).

б) Пусть кривая (L) определяется уравнением (2) и точка $M_0(x_0,y_0)\in(L)$. Пусть функция $F(x,y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$

непрерывные частные производные $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$. Точку $M_0(x_0,y_0)$ будем называть *обыкновенной* точкой кривой (L), если в этой точке выполняется соотношение

$$\left(F'_x(x_0,y_0)\right)^2+\left(F'_y(x_0,y_0)\right)^2\neq 0 \tag{5}$$

(т. е. если $F'_x(x_0,y_0)$ и $F'_y(x_0,y_0)$ не обращаются в нуль одновременно). Если же

$$\left(F'_x(x_0,y_0)\right)^2+\left(F'_y(x_0,y_0)\right)^2=0, \tag{6}$$

то точку $M_0(x_0,y_0)$ будем называть *особой* точкой кривой (L).

Убедимся, что если точка M_0 кривой (L) является обыкновенной, то в некоторой окрестности этой точки кривая (L) представляет собой либо график некоторой дифференцируемой функции $y=f(x)$, либо график некоторой дифференцируемой функции $x=g(y)$.

▶ Пусть кривая (L) определяется параметрическими уравнениями (1) и, кроме того, выполнено условие (3). Из условия (3) следует, что хотя бы одно из двух чисел $\varphi'(\alpha_0)$, $\psi'(\alpha_0)$ отлично от нуля. Пусть для определенности $\varphi'(\alpha_0)\neq 0$. Но тогда, в силу непрерывности функции $\varphi'(\alpha)$ в точке α_0, $\varphi'(\alpha)\neq 0$ в некоторой окрестности точки α_0 (см. теорему о стабильности знака). Следовательно, в упомянутой окрестности точки α_0 функция $x=\varphi(\alpha)$ является дифференцируемой и строго монотонной. При этих условиях существует дифференцируемая монотонная обратная функция $\alpha=\omega(x)$. Подставляя эту функцию в выражение $y=\psi(\alpha)$, мы убеждаемся, что кривая (L) в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ представляет собой график дифференцируемой функции $y=f(x)$ $(=\psi(\omega(x)))$.

Справедливость сформулированного утверждения для случая, когда кривая (L) определяется уравнением (2), вытекает из того, что в окрестности обыкновенной точки $M_0(x_0,y_0)$ выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения $F(x,y)=0$ (либо относительно y, если $F'_y(M_0)\neq 0$, либо относительно x, если $F'_x(M_0) \neq 0$; см. теорию неявных функций). Поэтому прилегающий к точке M_0 участок кривой (L) представляет собой график дифференцируемой функции $y = f(x)$ или функции $x = g(y)$. ◀

Замечание 1. ▶ В геометрии точку M_0 кривой (L) называют обыкновенной, если в некоторой окрестности этой точки кривая (L) представляет собой график некоторой дифференцируемой функции, и особой, если в любой окрестности этой точки кривая (L) не может быть представлена в виде графика дифференцируемой функции. Мы видели, что точка M_0 кривой (L), являющаяся обыкновенной согласно нашему определению, будет обыкновенной с геометрической точки зрения.

Можно привести примеры, когда точка M_0 кривой (L), являющаяся особой по нашему определению, будет обыкновенной с геометрической точки зрения. Таким образом, наше определение обыкновенной точки является более узким, чем геометрическое, но более удобным для приложений. ◀

Введем теперь понятие касания кривых (L_1) и (L_2) в их общей точке M_0. Будем говорить, что кривые (L_1) и (L_2) *касаются* в их общей точке M_0, если обе эти кривые имеют в точке M_0 касательные и эти касательные совпадают.

Пусть кривая (L_1) определяется параметрическими уравнениями (1), а кривая (L_2) — уравнением (2), и $M_0(x_0, y_0)$ — общая точка этих кривых (при этом координаты x_0 и y_0 отвечают значению $\alpha = \alpha_0$ параметра α). Будем считать, что точка M_0 является обыкновенной точкой кривых (L_1) и (L_2) и эти кривые касаются в точке M_0. Тогда эти кривые представляют собой в окрестности точки M_0 графики дифференцируемых функций. Ради определенности будем считать, что (L_1) и (L_2) являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ соответственно. Так как по условию кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, то угловые коэффициенты касательных в точке M_0 к графикам функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны, т. е.

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0). \tag{7}$$

Используя формулы дифференцирования функций, заданных параметрически, и формулы дифференцирования функций, заданных неявно, получим

$$f_1'(x_0) = \frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)}, \quad f_2'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{8}$$

Формулы (8) позволяют придать равенству (7) следующий вид:

$$\frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \tag{9}$$

или

$$F'_x(x_0, y_0)\varphi'(\alpha_0) + F'_y(x_0, y_0)\psi'(\alpha_0) = 0. \tag{10}$$

Соотношение (10) мы будем в дальнейшем называть условием касания в точке M_0 кривых (L_1) и (L_2), заданных соответственно уравнениями (1) и (2). Опуская аргументы функций и используя обозначения $\varphi'(\alpha) = \frac{dx}{d\alpha}$; $\psi'(\alpha) = \frac{dy}{d\alpha}$, мы запишем условие касания в следующей форме:

$$F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} = 0. \tag{11}$$

Замечание 2. Если в общей точке M_0 кривых (L_1) и (L_2), заданных соответственно уравнениями (1) и (2), выполнено условие касания (10) и если при этом точка M_0 является обыкновенной точкой кривых (L_1) и (L_2), то кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0. В самом деле, из соотношений (3) и (5) и из условия (10) вытекает либо соотношение (9), либо условие $\frac{\varphi'(\alpha_0)}{\psi'(\alpha_0)} = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}$, т. е. равенство угловых коэффициентов касательных в общей точке M_0 кривых (L_1) и (L_2). Это и означает, что кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0. Заметим, что условие касания (10) выполняется также и в случае, когда точка M_0 является особой точкой по крайней мере одной из кривых (L_1) и (L_2).

Итак, условие касания (10) выполняется как в случае, когда кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0, так и в случае, когда M_0 является особой точкой по крайней мере одной из этих кривых.

2°. Однопараметрические семейства плоских кривых. Характеристические точки кривых семейства.

Определение. Пусть уравнение

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{12}$$

для каждого значения α из промежутка (a, b) определяет на плоскости x, y кривую, причем различным значениям α соответ-

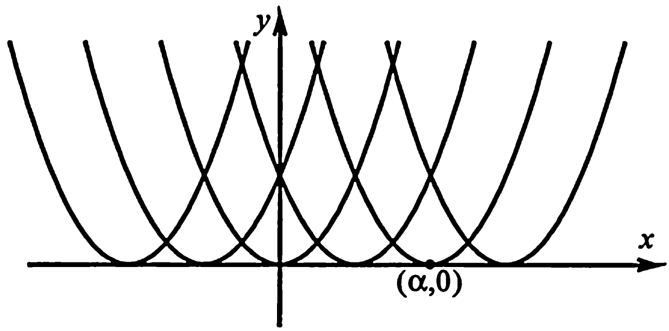

Рис. 2.16. К примеру 1

ствуют различные кривые. Тогда это множество кривых называется *однопараметрическим семейством кривых*, а параметр α называется *параметром* этого семейства.

Рассмотрим примеры однопараметрических семейств плоских кривых.

Пример 1. Уравнение $y-(x-\alpha)^2=0$ определяет семейство парабол, получаемых сдвигом по оси Ox параболы $y-x^2=0$ (рис. 2.16).

Пример 2. Уравнение $(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3=0$ определяет семейство полукубических парабол, полученных параллельным сдвигом вдоль биссектрисы первого координатного угла полукубической параболы $y^2=x^3$ (рис. 2.17).

Пусть функция $F(x,y,\alpha)$ является дифференцируемой функцией в области ее задания. В этом случае можно ввести понятие характеристической точки кривой семейства, определяемой соотношением (12). Точка $M(x,y)$ называется *характеристической точкой* кривой семейства (12), отвечающей данному значению α параметра семейства, если координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0. \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию характеристической точки кривой семейства (12). Для простоты ограничимся случаем, когда любые две кривые семейства пересекаются. (Заметим, что существуют такие семейства кривых, любые две кривые которых не пересекаются. Примером такого семейства может служить

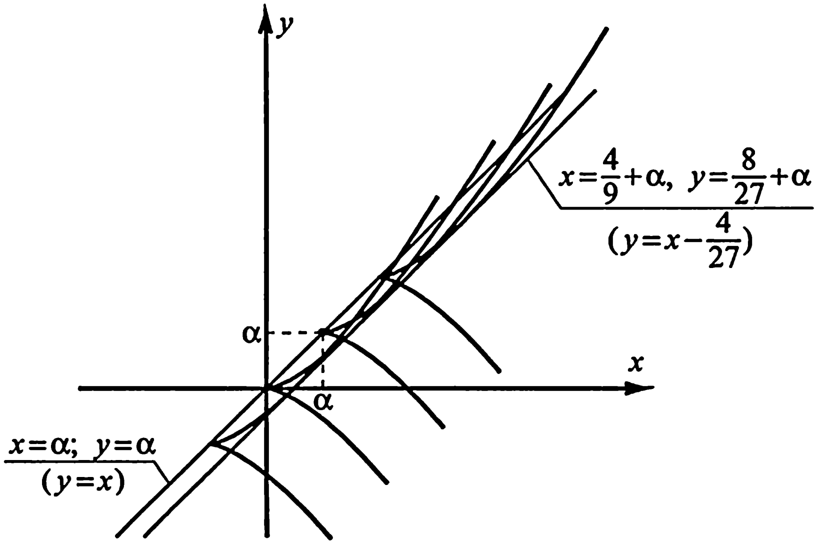

Рис. 2.17. К примеру 2

семейство кубических парабол, определяемых уравнением $y-(x-\alpha)^3=0$.)

Пусть (L_α) и $(L_{\alpha+\Delta\alpha})$ — две кривые семейства (12), отвечающие значениям параметра α и $\alpha+\Delta\alpha$ (рис. 2.18). Координаты точки N их пересечения удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ F(x,y,\alpha+\Delta\alpha)=0 \end{cases}$$

или равносильной системе

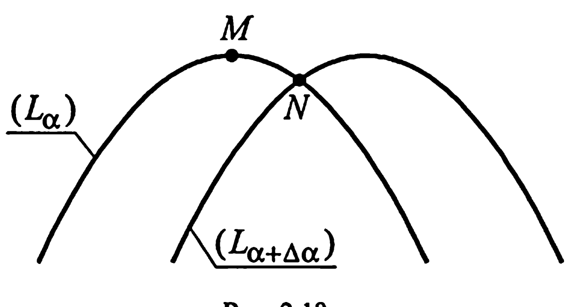

Рис. 2.18

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ \dfrac{F(x,y,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}=0. \end{cases}$$

Если $\Delta\alpha \to 0$, то точка N, расположенная на кривой $F(x,y,\alpha)=0$, стремится, вообще говоря, к некоторой точке M на этой кривой.

Так как $\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\dfrac{F(x,y,\alpha+\Delta\alpha)-F(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha}=F'_\alpha(x,y,\alpha)$, то координаты точки M удовлетворяют уравнениям (13), и поэтому точка M является характеристической точкой кривой семейства.

Итак, характеристическая точка данной кривой — это та точка, которая служит пределом при $\Delta\alpha \to 0$ точек пересечения данной кривой (L_α) и близкой к ней кривой $(L_{\alpha+\Delta\alpha})$.

3°. Огибающая и дискриминантная кривые однопараметрического семейства плоских кривых. Пусть однопараметрическое семейство плоских кривых определяется соотношением (12). Будем считать, что функция $F(x,y,\alpha)$ является дифференцируемой в области ее задания.

Определение 1. *Огибающей* однопараметрического семейства кривых (12) называется кривая (Г), которая: 1) в каждой своей точке касается только одной кривой семейства (12), 2) в разных точках касается различных кривых этого семейства.

Определение 2. *Дискриминантной кривой* семейства кривых (12) называется геометрическое место характеристических точек кривых этого семейства, т. е. кривая, определяемая системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0. \end{cases}$

Оказывается, что при некоторых условиях дискриминантная кривая семейства кривых (12) является огибающей этого семейства. Выясним эти условия, для чего докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ — характеристическая точка семейства $F(x,y,\alpha)=0$, отвечающая значению параметра α_0. Пусть функции $F(x,y,\alpha)$, $F'_\alpha(x,y,\alpha)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,α_0) и частные производные этих функций по x и y, т. е. $F'_x(x,y,\alpha)$, $F'_y(x,y,\alpha)$, $F''_{\alpha x}(x,y,\alpha)$, $F''_{\alpha y}(x,y,\alpha)$, непрерывны в самой точке (x_0,y_0,α_0). Тогда, если в точке (x_0,y_0,α_0) якобиан $\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то дискриминантная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, в некоторой окрестности этой точки может быть задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha), \end{cases}$ где $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ — дифференцируемые функции в некоторой окрестности точки α_0.

▶ Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ является характеристической точкой кривой семейства (12), отвечающей значению параметра α_0, то

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \\ F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0. \end{cases}$$

А тогда, принимая еще во внимание условия леммы, видим, что у нас выполнены все условия теоремы об однозначной разрешимости системы $\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$ относительно x и y (см. теорию неявных функций). Следовательно, в некоторой окрестности точки α_0 определены две функции

$$x = \varphi(\alpha), y = \psi(\alpha), \tag{14}$$

являющиеся единственным, непрерывным и дифференцируемым решением системы $\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$ Так как кривая $\begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha) \end{cases}$ состоит из характеристических точек семейства (12), то она является дискриминантной кривой этого семейства, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. ◀

Отметим, что, в силу единственности решения системы, $\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$ различные точки дискриминантной кривой, которая определяется параметрическими уравнениями (14) ($x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$), являются характеристическими точками различных кривых семейства $F(x, y, \alpha) = 0$.

Укажем теперь дополнительные условия, при выполнении которых дискриминантная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, представляет собой огибающую в окрестности этой точки.

Теорема. Пусть кроме условий, сформулированных в лемме, выполняются еще следующие два условия:

1) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0) производные F'_x, F'_y, $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$ и $F''_{\alpha\alpha}$ непрерывны;

2) в точке (x_0, y_0, α_0) выполняются соотношения

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad F''_{\alpha\alpha} \neq 0.$$

Тогда дискриминантная кривая, проходящая через характеристическую точку $M_0(x_0, y_0)$, является в некоторой окрестности этой точки огибающей семейства кривых $F(x, y, \alpha) = 0$.

▶ Было показано (см. лемму), что некоторый участок дискриминантной кривой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, может быть представлен параметрическими уравнениями (14) ($x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$), которые представляют собой решение системы $\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$ Подставим это решение в уравнения системы.

Получим тождества $F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=x}, \underbrace{\psi(\alpha)}_{=y}, \alpha) \equiv 0$ и $F'_\alpha(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=x}, \underbrace{\psi(\alpha)}_{=y}, \alpha) \equiv 0$.

Продифференцируем полученные тождества по α. Будем иметь

$$\begin{cases} F'_x \dfrac{dx}{d\alpha} + F'_y \dfrac{dy}{d\alpha} + F'_\alpha \equiv 0, \\ F''_{\alpha x} \dfrac{dx}{d\alpha} + F''_{\alpha y} \dfrac{dy}{d\alpha} + F''_{\alpha\alpha} \equiv 0. \end{cases} \tag{15}$$

Так как $F'_\alpha \equiv 0$, то первое соотношение из (15) примет вид

$$F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} = 0. \tag{*}$$

Видим, что в каждой точке рассматриваемой дискриминантной кривой выполняется условие касания (*) этой кривой и соответствующей кривой семейства. Поэтому, в силу замечания 2 из п. 1°, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что каждая характеристическая точка кривой семейства, расположенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и каждая точка дискриминантной кривой в этой окрестности являются обыкновенными.

У нас по условию в точке (x_0, y_0, α_0) выполняется соотношение $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0$, которое, в силу непрерывности частных производных F'_x и F'_y, будет выполнено и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0). Следовательно, в этой окрестности все характеристические точки кривых семейства являются обыкновенными.

У нас по условию в точке (x_0, y_0, α_0): $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$. Но тогда, в силу непрерывности, $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$ и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0). А тогда из второго соотношения тождества (15) вытекает, что в указанной окрестности производные $\dfrac{dx}{d\alpha}$ и $\dfrac{dy}{d\alpha}$ не обращаются одновременно в нуль. Таким образом, все точки дискриминантной кривой в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ являются обыкновенными. Из леммы, доказанной выше, вытекает также, что различные точки дискриминантной кривой являются характеристическими точками различных кривых семейства. ◀

Замечание 1. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы, показывают, что в случае, когда выполнены только условия леммы, в каждой точке дискриминантной кривой выполнено условие касания этой кривой и кривой семейства. Ранее было отмечено (см. замечание 2 пункта 1°), что условие касания выполняется и тогда, когда общая точка двух кривых является особой точкой по крайней мере одной из них. Отсюда вытекает, что дискриминантная кривая может представлять собой геометрическое место особых точек кривых семейства (если в каждой характеристической точке имеет место равенство $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0$). Отметим, что и сама дискриминантная кривая может иметь особые точки (если $\dfrac{dx}{d\alpha}$ и $\dfrac{dy}{d\alpha}$ равны нулю одновременно).

Замечание 2. Из доказанной теоремы следует: если все кривые семейства (12) и дискриминантная кривая этого семейства не имеют особых точек, то указанная дискриминантная кривая является огибающей семейства кривых (12).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти дискриминантную кривую семейства $y-(x-\alpha)^2=0$.

▶ Имеем $F(x,y,\alpha)=y-(x-\alpha)^2$; $F'_\alpha(x,y,\alpha)=2(x-\alpha)$. Таким образом, система (13) имеет вид

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-(x-\alpha)^2=0, \\ 2(x-\alpha)=0 \end{cases} \Rightarrow x=\alpha;\, y=0.$$

Видим, что характеристические точки имеют координаты $(\alpha,0)$. Поэтому дискриминантная кривая задается параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=\alpha, \\ y=0 \end{cases}$ (дискриминантная кривая — ось Ox).

Имеем, далее, $F'_x(x,y,\alpha)=-2(x-\alpha)$, $F'_y(x,y,\alpha)=1 \Rightarrow$ в точках дискриминантной кривой $(F'_x)^2+(F'_y)^2=0+1=1$ $(\neq 0)$. Кроме того, $F''_{\alpha\alpha}=-2$ $(\neq 0)$.

Вывод. Дискриминантная кривая данного семейства кривых, т. е. ось Ox, является огибающей этого семейства (рис. 2.16). ◀

Пример 2. Найти дискриминантную кривую семейства

$$(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3=0.$$

▶ Имеем $F(x,y,\alpha)=(y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3$; $F'_\alpha(x,y,\alpha)=-2(y-\alpha)+$ $+3(x-\alpha)^2$. Таким образом, система (13) имеет вид

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha)=0, \\ F'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-\alpha)^2-(x-\alpha)^3=0, \\ -2(y-\alpha)+3(x-\alpha)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=\alpha, \\ y=\alpha \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x=\alpha+\dfrac{4}{9}, \\ y=\alpha+\dfrac{8}{27}. \end{matrix}$$

Видим, что дискриминантная кривая представляет собой две линии, определяемые параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=\alpha, \\ y=\alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=\alpha+\dfrac{4}{9}, \\ y=\alpha+\dfrac{8}{27}. \end{cases}$$

(Это — соответственно прямые: $y = x$ и $y = x - \frac{4}{27}$.) Имеем, далее, в точках прямой $\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha \end{cases}$ $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0$. Следовательно, эта ветвь дискриминантной кривой представляет собой геометрическое место особых точек кривых заданного семейства. В точках прямой $\begin{cases} x = \alpha + \frac{4}{9}, \\ y = \alpha + \frac{8}{27} \end{cases}$ $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 2 \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^2 (\neq 0)$. Кроме того, $F''_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{3} (\neq 0)$.

Вывод. Ветвь дискриминантной кривой $y = x - \frac{4}{27}$ является огибающей заданного семейства кривых (рис. 2.17). ◀

§5. Особое решение обыкновенного дифференциального уравнения как огибающая семейства интегральных кривых

Вспомним, что решение $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т. е. если через каждую его точку (x_0, y_0), кроме этого решения, проходит и другое решение уравнения (1), имеющее в точке (x_0, y_0) ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в любой, даже сколь угодно малой проколотой окрестности точки (x_0, y_0).

График особого решения называют *особой интегральной кривой* уравнения (1).

Допустим, что общее решение уравнения (1) найдено в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0. \qquad (2)$$

Ясно, что (2) определяет однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения (1) (C — параметр).

Справедливо **утверждение**: если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся интегральными кривыми уравнения (1), имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая представляет собой особую интегральную кривую уравнения (1).

▶ В самом деле, в точках огибающей значения x, y, y' совпадают со значениями x, y, y' для интегральной кривой, касающейся огибающей в точке (x,y), и, следовательно, в каждой точке огибающей значения x, y, y' удовлетворяют уравнению $F(x,y,y') = 0$, т. е. огибающая является интегральной кривой уравнения (1).

Далее, в каждой точке огибающей нарушена единственность, так как через точки огибающей по одному направлению проходят по крайней мере две интегральные кривые: сама огибающая и касающаяся ее в рассматриваемой точке интегральная кривая семейства (2). Следовательно, огибающая является особой интегральной кривой.

Из §4 (пункт 3°) мы знаем, что если функция $\Phi(x,y,C)$ непрерывно дифференцируема, то огибающая входит в состав дискриминантной кривой, определяемой системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

В лемме и теореме предыдущего параграфа указаны условия, при выполнении которых некоторая ветвь дискриминантной кривой будет заведомо огибающей.

Пример 1. Решить уравнение $y = x + 2y' - (y')^2$. Выделить особые решения, если они существуют.

▶ Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Тогда

$$y = x + 2t - t^2. \qquad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = dx + 2dt - 2tdt \Rightarrow (t-1)dx + 2(t-1)dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-1)(dx + 2dt) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ и } x + 2t = C.$$

Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = x + 1, x \in (-\infty, +\infty) \text{ и } \begin{cases} x = -2t + C, \\ y = x + 2t - t^2. \end{cases} \qquad (**)$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$ax + b = x + 2a - a^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{c|c} x & a = 1 \\ x^0 & b = 2a - a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1, b = 1.$$

Функция $y = x+1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это решение уже было получено выше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2y' - (y')^2, \\ 2 - 2y' = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим: $y = x+1$. Значит, функция $y = x+1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Выясним, будет ли решение $y = x+1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, особым решением исходного уравнения. Общее решение заданного уравнения определяется соотношениями (**). Из первого уравнения системы (**) находим $t = \dfrac{-x+C}{2}$. Подставив это выражение для t во второе уравнение системы (**), получаем

$$y = x + (C-x) - \frac{(C-x)^2}{4} \Rightarrow \underbrace{y - C + \frac{(C-x)^2}{4}}_{=\Phi(x,y,C)} = 0.$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0, \\ \Phi'_C(x,y,C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - C + \dfrac{(C-x)^2}{4} = 0, \\ -1 + \dfrac{C-x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C-2, \\ y = C-1 \end{cases}$$

— параметрические уравнения дискриминантной линии. $\Rightarrow$ $y = x+1$ — дискриминантная линия. Имеем $\Phi'_x = -\dfrac{C-x}{2}$;

$\Phi'_y = 1$, $\Rightarrow$ В точках прямой $\begin{cases} x = C-2, \\ y = C-1 \end{cases}$ $(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 = 2 \ (\neq 0)$.

Имеем $\Phi''_{CC} = \dfrac{1}{2} \ (\neq 0)$.

Вывод. Прямая $y = x+1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является огибающей семейства интегральных кривых заданного уравнения. Значит, функция $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является особым решением исходного уравнения. ◀

Пример 2. Решить уравнение $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$. Выделить особые решения, если они существуют.

▶ Заданное уравнение решим относительно y:

$$y = \frac{8}{27}(y')^3 - \frac{4}{9}(y')^2 + x.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow$ $dy = tdx$). Тогда

$$y = \frac{8}{27}t^3 - \frac{4}{9}t^2 + x. \tag{*}$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \frac{8}{9}t^2dt - \frac{8}{9}tdt + dx \Rightarrow (t-1)dx = \frac{8}{9}t(t-1)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-1)\left(dx - \frac{8}{9}tdt\right) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ и } x = \frac{4}{9}t^2 + C.$$

Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = x - \frac{4}{27}, x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } \begin{cases} x = \frac{4}{9}t^2 + C, \\ y = \frac{8}{27}t^3 - \frac{4}{9}t^2 + x. \end{cases} \tag{**}$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$8a^3 - 12a^2 = 27(ax + b - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c|c} x & 0 = 27(a-1) \\ x^0 & 8a^3 - 12a^2 = 27b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1; b = -\frac{4}{27}.$$

Функция $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это решение уже было получено выше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(y')^3-12(y')^2=27(y-x), \\ 24(y')^2-24y'=0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y', находим $y=x$ и $y=x-\frac{4}{27}$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y=x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, не является решением этого уравнения, а функция $y=x-\frac{4}{27}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением, причем функция $y=x-\frac{4}{27}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является решением, подозрительным на особое. Выясним, будет ли оно особым. Общее решение заданного уравнения определяется системой уравнений (**). Исключая из системы (**) параметр t, получаем

$$(x-C)^{3/2}+C-y=0\ \left(\Phi(x,y,C)=(x-C)^{3/2}+C-y\right).$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_C(x,y,C)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-C)^{3/2}+C-y=0, \\ -\frac{3}{2}(x-C)^{1/2}+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=C+\frac{4}{9}, \\ y=C+\frac{8}{27} \end{cases}$$

— параметрические уравнения дискриминантной линии $\Rightarrow y=x-\frac{4}{27}$. Имеем $\Phi'_x=\frac{3}{2}(x-C)^{1/2}$; $\Phi'_y=-1 \Rightarrow$ В точках прямой $\begin{cases} x=C+\frac{4}{9}, \\ y=C+\frac{8}{27} \end{cases}$ $(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2=2\ (\neq 0)$; $\Phi''_{CC}=\frac{9}{8}\ (\neq 0)$.

Вывод. Прямая $y=x-\frac{4}{27}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, является огибающей семейства интегральных кривых заданного уравнения. Следовательно, решение $y=x-\frac{4}{27}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, исходного уравнения является особым решением этого уравнения. ◀

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Учебное издание

Аксенов Анатолий Петрович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧАСТЬ 1

Учебник для вузов

Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 15,06

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru